ÜBER DIE IN DER THEORIE DER TERNÄREN KUBISCHEN FORMEN AUFTRETENDEN KONNEXE

INAUGURAL-DISSERTATION

EINER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT (II. SEKTION)
DER K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN
AM 10. MÄRZ 1903
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

KARL PETRI
AUS GÖCKLINGEN

ACAD. MED. BAT. BIBL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1904

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552301_0025

Einleitung.

Die folgenden Untersuchungen haben zur Aufgabe das Studium der wichtigsten in der Theorie der ternären kubischen Formen auftretenden Konnexe.

Die Theorie dieser Formen hat auf eine Reihe von Zwischenformen geführt, deren geometrische Bedeutung bis jetzt noch nicht klargelegt ist. Als Kovarianten der Grundform f werden die so definierten Gebilde in enger Beziehung stehen zur Kurve dritter Ordnung, und ihre Behandlung wird auf eine Reihe von Eigenschaften führen, die die Geometrie schon eingehend behandelt hat.

Clebsch war der erste, der begann, die Konnexe zum Gegenstand seiner Studien zu machen.[1]) Seine Untersuchungen findet man ausgeführt und wesentlich erweitert in Clebschs Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet von Lindemann. Insbesondere ist hier eine Theorie der Konnexe $(m, 1)$ und $(1, n)$ gegeben.

Aufgefordert von Herrn Professor Lindemann werde ich nun untersuchen, in welcher Beziehung die mit N, L und M bezeichneten Zwischenformen und die ihnen dualistisch gegenüberstehenden Formen zur Kurve dritter Ordnung stehen, und wie sich die allgemeinen Untersuchungen in all diesen Fällen gestalten.

Während der Bearbeitung wurde mir stets die liebevollste Anregung und Unterstützung von Herrn Professor Lindemann zu teil, wofür ich meinen herzlichen Dank ausspreche.

Die vorliegende Arbeit stützt sich im wesentlichen auf die beiden Arbeiten von Clebsch und Gordan, Über ternäre kubische Formen, Math. Ann. Bd. I u. VI. Die letztere gibt zugleich die Ableitung und Zusammenstellung der gebräuchlicheren Formeln. In der Symbolik wurde

1) Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene, Math. Ann. Bd. VI.

durchweg die gleiche Bezeichnung wie in dem letzten Aufsatze angewendet; für die Form der neun Wendepunkte

$$\sum \pm \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial \Sigma}{\partial u_2} \frac{\partial T}{\partial u_3}$$

wurde das Zeichen Ψ eingeführt, da das von andern Autoren gebrauchte Zeichen Φ in dem genannten Aufsatze schon zur Bezeichnung einer andern Form benutzt ist.

Nicht behandelt wurden die Ausnahmefälle, wo die Kurve rational wird oder zerfällt, Untersuchungen, die einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Ebenso wurde nicht näher auf die Realitätsverhältnisse eingegangen, zu deren Behandlung ja durch die elliptischen Funktionen ein ausgezeichnetes Hilfsmittel gegeben ist.

I. Teil.

Die Kombinante N.

N ist definiert als Funktionaldeterminante von f, Δ und u_x;

$$N = \frac{1}{9} \sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} u_3 = (a\alpha u) a_x^2 \alpha_x^2 = N_x^4 u_n.$$

Die geometrische Interpretation von N ist bekannt. $N_x^4 u_n$ ordnet jeder Geraden u die Kurve 4ter Ordnung der Punkte x zu, deren lineare Polaren in bezug auf f und Δ sich auf u schneiden (C.-L. p. 573)[1]; andererseits: der Punkt u_n ist der Tangentialpunkt des Punktes x (C.-L. p. 643).

Der Konnex N wurde zum Teil diskutiert und geometrisch interpretiert von Herrn G. Maisano in seiner Abhandlung: 'Il combinante N della forma ternaria cubica' (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo 1890 t. IV); im folgenden werden zunächst diese Untersuchungen vervollständigt durch Behandlung der Hauptkoinzidenz und der zugehörigen Kurvensysteme; durch die folgende Besprechung gewisser Bildungen zweiten Grades wird dann die Untersuchung der Konnexe L und M vorbereitet.

§ 1. Die Hauptkoinzidenz von N.

Da N Funktionaldeterminante ist, läßt sich die Differentialgleichung der Hauptkoinzidenz leicht integrieren; aus

$$N_x^4 (nx\, dx) = 0$$

folgt

$$3 a_x^3 \alpha_x^2 \alpha_{dx} - 3 \alpha_x^3 a_x^2 a_{dx} = 0,$$

woraus $kf + \lambda \Delta = 0$ als System der Integralkurven gewonnen wird.

N hat $m^2 + m + 1 = 21$ Grundpunkte, d. h. solche Punkte, die mit jeder durch sie gehenden Geraden ein Konnexelement bilden, während im allgemeinen ein Punkt mit allen Geraden durch einen andern, also nur mit einer durch ihn selbst ein Konnexelement bildet.

Die 21 Grundpunkte sind also entweder solche, für die der Punkt u_n unbestimmt wird, und das sind die 12 Ecken der Wendepunktsdreiseite,

---

1) Unter C.-L. werden die „Vorlesungen über Geometrie" von A. Clebsch, bearbeitet von Dr. F. Lindemann zitiert, unter C. u. G. die Arbeiten von Clebsch und Gordan.

oder solche, die mit den zugeordneten zusammenfallen, wie die 9 Wendepunkte; dies ergibt sich direkt aus der Definition.[1]) Man hat also:

Die 21 Schnittpunkte der 12 Geraden der 4 Wendepunktsdreiseite sind die 21 Grundpunkte des Konnexes N.

Da wir schon die Integralkurven des Konnexes kennen, können wir auch sofort die Kurven Φ', den Ort der Wendepunkte und F', den Ort der Wendetangenten der Integralkurven angeben; Φ' muß auf $G_{\Delta,-f} = \Gamma$, F' auf die Form für die 9 Wendepunkte Ψ führen.

Führen wir die Rechnung durch, so ist (C.-L. p. 1003):

$$\Phi' = (nn'x)\, N_{n''} N_x^{\,3} N_x'^{\,4} N_x''^{\,4}$$

oder wenn

$$K_x^{\,7} u_k = 3 N_{n''} N_x^{\,3} N_x''^{\,4} u_n \quad \text{(C.-L. p. 641)}$$
$$\Phi' = \tfrac{1}{3}(knx) = -\tfrac{1}{12}\Gamma \quad \text{(C.-L. p. 644).}$$

Um F' zu bekommen, müssen wir $N_4^{\,4} u_n$ in Linienkoordinaten aufstellen; ist

$$J = (NN'u)^4 v_n v_{n'}$$
$$\mathfrak{J} = (NN'u)^2 (N'N''u)^2 (N''Nu)^2\, v_n v_{n'} v_{n''},$$

so heißt die C_4 in Linienkoordinaten u

$$J^3 - 6\mathfrak{J}^2 = 0.$$

F' erhält man, wenn man in dieser Gleichung $u = v$ setzt; dann kommen die Ausdrücke:

$$\bar{J} = (NN'u)^4 u_n u_{n'}$$
$$\mathfrak{J} = (NN'u)^2 (N'N''u)^2 (N''Nu)^2\, u_n u_{n'} u_{n''}.$$

Nach C. u. G., Math. Ann. VI p. 477 ist nun

$$\bar{J} = 0,$$

folglich ist F' gegeben in der Form

$$F' = -6\{(NN'u)^2 (N'N''u)^2 (N''Nu)^2\, u_n u_{n'} u_{n''}\}^2.$$

Der Ausdruck in der Klammer läßt sich leicht auf die für die Wendepunkte gewöhnlich gegebene Form reduzieren; diese ist, wenn $F = u_f^{\,6}$ die Gleichung von f in Linienkoordinaten darstellt[2]):

$$\Psi = (fst)\, u_f^{\,5} u_s^{\,2} u_t^{\,2}.$$

Nach Math. Ann. VI p. 485 (75) hat man nämlich:

$$(NN'u)^2 N_x^{\,2} N_x'^{\,2} u_n u_{n'} = -\tfrac{1}{3}(f\mathsf{M} - \Delta\Lambda),$$

wo (ibid. 74)

$$\Lambda = \Lambda_x = (aNu)^3 u_n N_x$$
$$\mathsf{M} = \mathsf{M}_x = (\alpha Nu)^3 u_n N_x$$

---

1) Für einen nicht in einen Eckpunkt fallenden Punkt eines Wendepunktsdreiseits ist der Tangentialpunkt bestimmt, wie man aus der kanonischen Form sieht:

$$N = 2a(a^3 + 8b^3)\{u_1 x_1 (x_2^{\,3} - x_3^{\,3}) + \cdots\}.$$

2) Vgl. C.-L. p. 578; Gundelfinger, Math. Ann. Bd. IV; G. Maisano, § 8.

ist. Mit Berücksichtigung dieser Definitionen wird der Ausdruck in der obigen Klammer

$$(NN'u)^2(N'N''u)^2(N''Nu)^2 u_n u_{n'} u_{n''} = \tfrac{2}{3}(\Lambda\mathsf{M}u)\, u_\lambda^4 u_\mu^4.$$

Diese Form steht aber der C.-L. p. 639 (35) gegebenen vermöge des bei Kurven dritter Ordnung bestehenden Dualismus dualistisch gegenüber; dort war

$$(lmx) = \tfrac{3}{2}\Omega.$$

Überträgt man diese Form[1]) mit Berücksichtigung der Zahlenfaktoren, so kommt

$$(NN'u)^2(N'N''u)^2(N''Nu)^2 u_n u_{n'} u_{n''} = \tfrac{3}{4}\Psi.$$

§ 2. Die Kurvensysteme X_y und U_v für N.

Die C_5 $N_x^4(nxy)$ bilden ein Netz durch die 21 Grundpunkte, jede C_5 schneidet auf allen durch y gehenden Strahlen die 4 Koinzidenzpunkte aus und geht außerdem noch durch y hindurch. Die Tangente in y ist die zu y gehörige Koinzidenzgerade; sie schneidet die C_5 noch in drei weiteren, ihren anderen Koinzidenzpunkten. Man hat also:

Die 21 Schnittpunkte der Dreiecksgeraden bilden mit den 4 Koinzidenzpunkten einer beliebigen Geraden ein System von 25 Punkten, durch die noch ein Büschel von C_5 hindurchgeht.

Von y gehen noch $(m-1)(m+2) = 18$ Tangenten an X_y, die dadurch charakterisiert sind, daß für sie 2 der 4 Koinzidenzpunkte zusammenfallen, und da diese Eigenschaft nur den Tangenten an F' zukommt, so sind diese 18 Tangenten an X_y identisch mit den 9 Verbindungslinien von y mit den Wendepunkten von f, jede doppelt gezählt; diese Geraden sind Wendetangenten der C_5, der Wendepunkt von f ist der Berührungspunkt; der eine nicht nach y oder in den Wendepunkt fallende Punkt auf einer dieser Geraden ist der Schnitt der Geraden mit der harmonischen Geraden des betreffenden Wendepunktes.

Um diese Verhältnisse einzusehen, setze man $x = y + \lambda z$ und lasse z nachträglich in einen Wendepunkt fallen, man hat dann die binäre Form

$$\lambda \cdot N^4_{y+\lambda z}(nzy) = 0,$$

oder anders geschrieben mit Weglassung des Faktors λ:

$$\begin{aligned}&\lambda^4(a_z^3\alpha_y\alpha_z^2 - \alpha_z^3 a_y a_z^2) + 2\lambda^3(a_z^3\alpha_y^2\alpha_z - \alpha_z^3 a_y^2 a_z)\\ &+ \lambda^2(a_z^3\alpha_y^3 - 3\,a_y^2 a_z\alpha_y\alpha_z^2 + 3\,a_y a_z^2\alpha_y^2\alpha_z - a_y^3\alpha_z^3)\\ &+ 2\lambda(a_y a_z^2\alpha_y^3 - \alpha_y\alpha_z^2 a_y^3) + (a_y^2 a_z\alpha_y^3 - \alpha_y^2\alpha_z a_y^3) = 0.\end{aligned}$$

---

1) Zu den Formeln Math. Ann. VI hat man nur noch hinzuzufügen:

$$\Omega^{(II)} = \frac{R^7 S^3}{6^2 \cdot 9}\Psi.$$

Ist z Wendepunkt, also

$$a_z^3 = 0, \quad \alpha_z^3 = 0,$$

so verschwinden zunächst die Faktoren von λ^4 und λ^3; aus der identischen Gleichung

$$(a\alpha\,\widehat{zy})^3 = 0 \qquad \text{(C.-L. p. 562)}$$

ergibt sich dann, daß auch der Koeffizient von λ^2 verschwindet, womit die Behauptung bewiesen ist.

In dem Netz der C_5 gibt es unendlich viele mit Doppelpunkt, der Ort der Doppelpunkte ist $\Gamma = 0$. (Vgl. C.-L. p. 1005.) Wie die Doppelpunkte, so liegen auch die entsprechenden Punkte y auf Γ. Denn sie liegen auf F', wenn diese Kurve in Punktkoordinaten gegeben wird; die Gleichung der 9 Wendepunkte in Punktkoordinaten führt aber wieder auf Γ.

Nun zeigt sich aber, daß für einen Punkt y von Γ die C_5 X_y zerfällt, denn sie muß mit der betreffenden Dreiecksgeraden, auf der y liegt, 6 Schnittpunkte haben, enthält also die Gerade vollständig.

Den Punkten y einer Wendepunktsgeraden entspricht also ein Büschel von C_5, die in die Gerade selbst und ein Büschel von C_4 zerfallen; dieses Büschel geht durch die übrigen 10 nicht auf der Geraden liegenden Dreiecksecken und durch die übrigen 6 Wendepunkte hindurch und hat diese Wendepunkte auch zu Wendepunkten.

Ist y ein Dreieckseckpunkt, so zerfällt X_y in die 2 durch den Punkt gehenden Wendepunktsgeraden und eine C_3, die die noch übrigen 3 Wendepunkte zu Wendepunkten hat und durch die übrigen 9 Dreiecksecken hindurch geht.

Ist y ein Wendepunkt, so besteht X_y aus den 4 durch den Wendepunkt gehenden Dreiecksseiten und einer Geraden, die auf jeder durch den Wendepunkt gehenden Geraden den letzten nicht im Wendepunkt liegenden Koinzidenzpunkt ausschneidet; erinnert man sich der Definition von N, so sieht man, daß diese Gerade die harmonische Gerade des betr. Wendepunktes ist.

Nimmt man die erste Polare von y in bezug auf X_y: $N_x^3 N_y(nxy)$; sie schneidet X_y in den Berührungspunkten der Tangenten von y; da dies die 9 Wendepunkte sind, so ergibt sich: Die Kurven $N_x^3 N_y(nxy)$ bilden ein System von C_4 durch y und die 9 Wendepunkte, die in letzteren die Verbindungsgraden von y mit denselben berühren. Die erste Polare von y in bezug auf diese C_4 ist eine C_3 durch die 9 Wendepunkte und y, folglich ist $N_x^2 N_y^2(nxy)$ eine Kurve des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta$, und zwar die durch y gehende. In der Tat zeigt man leicht vermittels der Identität

$$(a\alpha u)^3 \equiv 0,$$

$$3\,N_x^2 N_y^2(nxy) = a_x^3 \alpha_y^3 - a_y^3 \alpha_x^3 = H(y),$$

eine Gleichung, die die Bedeutung von N als Kombinante erkennen läßt.[1])

1) Über Kombinanten, Dr. P. Gordan, Math. Ann. V.

Die Kurven $U_v = (Nuv)^4 u_n$ bilden ein System von K_5 mit v als 4facher Tangente; U_v wird umhüllt von den Koinzidenzstrahlen der Punkte von v; die 4 Berührungspunkte von v sind die Koinzidenzpunkte; alle Geraden v, für die 2 und damit 3 solche zusammenfallen, gehen durch einen der Wendepunkte.

Von jedem Wendepunkt kann man 5 Tangenten an die U_v legen, und da auf diesen 5 Tangenten in den Wendepunkt 3, auf v der 4. Koinzidenzpunkt fallen muß, müßte v harmonische Gerade des Wendepunktes sein, was im allgemeinen nicht der Fall sein wird; folglich sind 4 dieser Geraden die 4 durch den Wendepunkt gehenden Dreiecksgeraden, die 5. trifft v im Schnitt mit der harmonischen Geraden des Wendepunktes; man hat also:

Alle Kurven U_v berühren die 12 Wendepunktsgeraden und die 9 Geraden, die vom Schnitt von v mit den harmonischen Geraden nach den betreffenden Wendepunkten gezogen werden können.

Die Kurven U_v lassen sich mit den X_y derart in Verbindung setzen, daß sich ein Konnex $\mathfrak{W}(y, v)$ angeben läßt, der für festes y die Gleichung der X_y in Linienkoordinaten V_{Xy}, für festes v die Gleichung der U_v in Punktkoordinaten Y_{Uv} gibt.

Von einem Punkt y gibt es nämlich 5 Tangenten an die U_v, und dies sind die Verbindungsgeraden von y mit den Schnittpunkten von v mit X_y. Fallen von diesen Schnittpunkten zwei zusammen, so fallen 2 Tangenten von y zusammen, y ist also im allgemeinen ein Punkt von U_v.

Die Kurve U_v in Punktkoordinaten wird also durch Nullsetzen der Diskriminante des Schnittpunktsystems von X_y mit v gewonnen. Diese Überlegungen lassen sich übrigens auf Konnexe (m, n) erweitern.

Stellt man also U_v in Punktkoordinaten auf, so berühren die C_5 dieser sämtlichen Punkte y die Gerade v, und da U_v vom 8. Grade in Punktkoordinaten wird, gibt es im Netz X_y 64 Kurven, welche 2 beliebige Geraden berühren.

Eine K_5 wird im allgemeinen vom 26. Grade in Punktkoordinaten und vom 8. Grade in den Koeffizienten der Klassenkurve, folglich wird zunächst Y_{Uv} vom 20. Grade in y, vom 32. in v und vom 8. in Symbolen N. Da aber v als 6 Doppeltangenten zählt, sondert sich nach allgemeinen Überlegungen der Faktor v_y^{12} ab, so daß Y_{Uv} vom 8. Grad in y und vom 20. in v wird; Y_{Uv} stellt einen Konnex dar, der die gleiche Hauptkoinzidenz wie N hat, nur doppelt gezählt; also hat man die Form:

$$Y_{Uv} \equiv N^2 A \pmod{v_y}.$$

A ist vom 18. Grad in v und vom 6. in Symbolen N; ebenso ergibt sich aber

$$C \cdot V_{Xy} = Y_{Uv}.$$

Da nun V_{Xy} für $v_y = 0$ die Gleichung der 18 Tangenten von y an F',

also das Quadrat der Verbindungslinien von y mit den 9 Wendepunkten gibt, ist

$$A = \Psi^2,$$

so daß man hat

$$\mathfrak{W}(y, v) = C V_{xy} = Y_{Uv} \equiv N^2 \Psi^2 \pmod{v_y}.$$

§ 3. Das Netz $N_x^4 u_n$.

Wie man an der kanonischen Form sieht

$$N = 2 \cdot a(a^3 + 8b^3)\{u_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3) + \cdots\},$$

bilden die C_4 $N_x^4 u_n$ ein Netz durch die 12 Dreieckseckpunkte.

Durch die 4 Koinzidenzpunkte auf einer Geraden und die 12 Dreieckseckpunkte ist die C_4 vollständig bestimmt.

Die 4 noch übrigen Schnittpunkte zweier solcher Kurven haben den Schnittpunkt ihrer zugehörigen Geraden u und v zum Tangentialpunkt; mithin ergibt sich:

Die Berührpunkte der Tangenten von einem Punkt an die durch ihn zu legende $C_3(\varkappa\lambda)$ bilden mit den 12 Ecken der Wendepunktsdreiseite ein System von 16 Punkten, die eine C_4 nicht bestimmen.

Weiterhin gilt folgender Satz:

Die Schnittpunkte von u mit der zugehörigen C_4 bilden ein äquianharmonisches Punktquadrupel.

Für die beiden Invarianten der binären Form

$$N_x^4 u_n = 0, \quad u_x = 0$$

ergibt sich nämlich nach dem Clebschschen Übertragungsprinzip

$$i = (NN'v)^4 u_n u_{n'}$$

$$j = (NN'v)^2 (N'N''v)^2 (N''Nv)^2 u_n u_{n'} u_{n''}.$$

$i(v)$ ist die Enveloppe derjenigen Geraden, die die C_4 in einem äquianharmonischen, $j(v)$ die Enveloppe derjenigen, die N in einem harmonischen Punktquadrupel schneiden.

Unsere Behauptung folgt nun direkt aus der Formel

$$(NN'u)^4 u_n u_{n'} = 0 \quad \text{(C. u. G, Math. Ann. VI p. 477)},$$

deshalb führt die Form

$$(NN'u)^2 (N'N''u)^2 (N''Nu)^2 u_n u_{n'} u_{u''} = 0$$

auf die Gleichung der 9 Wendepunkte, weil zugleich

$$i(u) = 0, \quad j(u) = 0,$$

also die Diskriminante

$$R = i^3 - 6j^2$$

verschwinden muß.

Das Kurvensystem

$$(NN'v)^4 u_n u_{n'} = 0$$

hat nun geometrisch sehr interessante Eigenschaften.

Entwickeln wir zunächst nach dem Gordanschen Verfahren die Form in eine Reihe (vgl. C.-L. p. 926 ff.), so ist

$$\varphi_0 = (NN'u)^4 u_n u_{n'} = 0,$$

$$\varphi_1 = (\widehat{NN'}nx)\,(NN'u)^3 u_{n'} = \tfrac{3}{4}\,\mathsf{N}_x u_v^4 \quad \text{(C. u. G., M. A. VI p. 490)},$$

$$\varphi_2 = (\widehat{NN'}nx)\,(NN'n'x)\,(NN'u)^2 = -\,N_{n'}N_n'\,(NN'u)^2\,N_x N_x' = 0$$

(M. A. VI p. 477),

demnach

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_1 = \tfrac{3}{4}\,(\mathsf{N}uv)u_v^4, \quad \psi_2 = 0,$$

also mit Berücksichtigung der Konstanten

$$(NN'v)^4 u_n u_{n'} = (\mathsf{N}vu)\,v_v^3 u_v.$$

Daraus ergibt sich zunächst: Diejenigen Geraden v, welche die $C_4\ N_x^4 u_n$ in 4 äquianharmonischen Punkten schneiden, bilden die erste Polare der Geraden u in bezug auf die zu u gehörige K_5

$$(\mathsf{N}uv)\,v_v^4 = 0.$$

Diese Kurven stehen dem System der X_y dualistisch gegenüber, wenn das Kurvensystem

$$\varkappa\Pi + \lambda P = 0$$

der Behandlung zugrunde gelegt wird. Dies folgt direkt aus der Formel

$$N^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\,\frac{R^2}{3}\,S_{\varkappa\lambda}\,\mathsf{N}.$$

Mit Benutzung der p. 4 gemachten Bemerkungen ergibt sich deshalb: Die Kurven $(NN'v)^4 u_n u_{n'}$ bilden ein System von K_4, welche die 9 harmonischen Geraden in ihrem Schnittpunkt mit u, die Gerade u im Berührpunkt der u berührenden Kurve der Schar $\varkappa\Pi + \lambda P = 0$ berühren, wobei man nebenbei noch den bekannten Satz hat:

Die 4 Dreieckspunkte auf einer harmonischen Geraden bilden ein äquianharmonisches Punktquadrupel.

Umgekehrt gehört zu jedem v eine K_2, und dies ist der Polarkegelschnitt von v in bezug auf die berührende K_3 der Schar, es ergibt sich also:

Alle Geraden u, deren zugehörige $C_4\ N_x^4 u_n$ eine vorgegebene Gerade u äquianharmonisch schneiden, umhüllen die Polare K_2 von u in bezug auf die v berührende K_3 der Schar.

Die $C_4\ N_x^4 u_n$ hat im allgemeinen weder Doppel- noch Rückkehrpunkte, denn von den 4 beweglichen Schnittpunkten zweier solcher Kurven können nie 2 zusammenfallen, sowenig als 2 der 4 Tangenten von einem Punkte von $f_{\varkappa\lambda}$ an $f_{\varkappa\lambda}$ zusammenfallen können, es müßte denn dieser Fall für alle Tangentenquadrupel eintreten (C.-L. p. 578).

Es gibt also nur ∞^1 C_4 mit Doppelpunkt; die Doppelpunkte sind gegeben durch die Gleichungen

$$N_x^3 N_i u_n = 0, \quad f \cdot i = 1, 2, 3.$$

Durch Elimination von u findet man

$$(NN'N'')\,(nn'n'')\,N_x^3 N_x'^3 N_x''^3 = 0.$$

Dies ist eine in den 3 Symbolen N ganz symmetrische Form für Ω (C.-L. Bd. I p. 571); denn es ist

$$(NN'N'')\,(nn'n'') = \begin{vmatrix} 0 & N_{n'} & N_{n''} \\ N_n' & 0 & N_{n''}' \\ N_n'' & N_{n'}'' & 0 \end{vmatrix} = 2\,N_{n'} N_{n''}' N_n'';$$

also kommt

$$(NN'N'')\,(nn'n'')\,N_x^3 N_x'^3 N_x''^3 = 2\,N_{n'} N_{n''}' N_n''\,N_x^3 N_x'^3 N_x''^3.$$

Aus

$$\tfrac{1}{3} K_x^7 u_k = N_{n'} N_x^3 N_x'^4 u_n$$

ergibt sich

$$\tfrac{7}{3} K_x^6 K_{n''} N_k'' N_x^3 = 4\,N_{n'} N_{n''}' N_n''\,N_x^3 N_x'^3 N_x''^3 + 3\,N_{n'} N_{n''} N_n''\,N_x^2 N_x'^4 N_x''^3.$$

Entwickelt man nun

$$N_{n'} N_y' N_x^3 N_x'^3 u_n$$

in eine Gordansche Reihe, so kommt, da

$$\varphi_0 = \tfrac{1}{3} K, \quad \varphi_1 = N_{n'}(NN'v)\,N_x^3 N_x'^3 u_n = \tfrac{1}{2} \psi_x^5 (\psi u v)$$

wird,

$$7\,N_{n'} N_y' N_x^3 N_x'^3 u_n = \tfrac{7}{3} K_x^6 K_y u_k + \tfrac{3}{2}(\psi u_y - \psi_x^5 \psi_y u_x),$$

mithin für

$$y_i = n_i'', \quad u_i = N_i'' N_x''^3$$

$$7\,N_{n'} N_{n''}' N_n'' N_x^3 N_x'^3 N_x''^3 = \tfrac{7}{3} K_x^6 K_{n''} N_k'' N_x''^3 + \tfrac{3}{2}(\psi N_{n''}'' N_x''^3 - \psi_x^5 \psi_{n''} N_x''^4);$$

setzt man den so gefundenen Wert ein, so kommt

$$\underline{(NN'N'')\,(nn'n'')\,N_x^3 N_x'^3 N_x''^3 = \Omega.}$$

Die Doppelpunkte der C_4 $N_x^4 u_n$ liegen auf den 9 harmonischen Geraden.

Die Geraden, denen diese C_4 mit Doppelpunkt entsprechen, sind nun Gerade durch einen der 9 Wendepunkte.

Denn da zu allen Punkten einer harmonischen Geraden der entsprechende Wendepunkt als Tangentialpunkt gehört, der Doppelpunkt aber auf einer harmonischen Geraden liegt, so muß die entsprechende Gerade u durch den zugehörigen Wendepunkt gehen.

Die C_4 enthält dann die harmonische Gerade ganz, da sie mehr als 4 Schnittpunkte mit ihr hat; sie zerfällt in diese Gerade und eine C_3 durch die übrigen 8 nicht auf der harmonischen Geraden gelegenen Drei-

ecksecken und den zur harmonischen Geraden gehörigen Wendepunkt, und zwar hat diese C_3 u im Wendepunkt zur Wendetangente.[1])

Ist u Gerade eines Wendepunktdreiseits, so zerfällt die C_4 in die 3 harmonischen Geraden der auf jener Dreiecksgeraden gelegenen Wendepunkte und eine 4. Gerade, die durch die 2 noch übrigen Dreiecksecken hindurchgehen muß, also die Wendepunktsgerade selbst.

§ 4. Der zu N konjugierte Konnex.[2])

Für die konjugierten Konnexe aller Konnexe $(m, 1)$ tritt der Fall ein, daß die einem Punkt y zugeordnete Klassenkurve aus m^2 Punkten besteht; dies sind die Basispunkte des C_m-Büschels, das den durch y gehenden Geraden u entspricht. In unserm Falle hat nach allgemeinen Überlegungen der konjugierte Konnex von $N_x^4 u_n$ die Ordnung 4 und die Klasse 16. Da aber alle $N_x^4 u_n$ die 12 Dreieckseckpunkte gemein haben, so wird sich als Faktor die Form der 12 Dreieckseckpunkte absondern; sie heißt

$$\overline{\Gamma} = (\tfrac{1}{6} S^3 + 4 T^2) \Sigma^4 - 12 S T \Sigma^3 \mathsf{T} + 6 S^2 \Sigma^2 \mathsf{T}^2 + 24 T \Sigma \mathsf{T}^3 - 18 S \mathsf{T}^4.$$

Hat allgemein das durch einen Konnex (m, n) definierte Kurvensystem μ feste Punkte und ν feste Tangenten gemein, so sondert sich von der Gleichung des konjugierten Konnexes die Gleichung der μ festen Punkte und der ν Tangenten ab. Ähnliches gilt überhaupt für eine gemeinsame Enveloppe der durch den Konnex definierten Kurvensysteme.

Ein bemerkenswertes Beispiel hierfür liefert der Konnex $\Theta_x^2 u \vartheta^2$. Einem Punkte x ordnet er den Polar C_2 in bezug auf f in Linienkoordinaten zu, einer Geraden u die Polokonik oder den Ort der Punkte, deren Polar C_2 u berühren; die Polokonik ist auch die Enveloppe der linearen Polaren der Punkte von u.[3]) Von diesen Polokoniken wissen wir zugleich, daß sie sämtlich die Hessesche Kurve in 3 Punkten berühren[4]); also wird sich Δ in Linienkoordinaten absondern; in der Tat nimmt man den Berührpunkt y einer Tangente des zu x gehörigen Polar C_2, so entsprechen allen Geraden u durch ihn einfach unendlich viele Polokoniken, welche sämtlich die linearen Polare von y und außerdem die Hessesche Kurve berühren, also ist die Enveloppe der Polokoniken in Punktkoordinaten

$$\alpha_x^3 a_y^2 a_x = 0.$$

---

1) Nach den Untersuchungen von Herrn Maisano über die Hessesche Kurve von N, fallen immer 12 Wendepunkte von $N_x^4 u_n$ in die 12 Dreiecksecken, sodaß also das obige Büschel von C_3 durch 8 Dreiecksecken und den einen Wendepunkt ein syzigetisches wird.

2) Clebsch-Lindemann p. 944.

3) C.-L. p. 543; Cremona, Ebene Kurven in der Übersetzung von M. Curtze, art. 136; Durège, Ebene Kurven 3. Ordnung, Abschn. IV.

4) Hesse, Über Kurven 3. Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Kurve in 3 verschiedenen Punkten berühren, Crelles Journal Bd. 36; Cremona, art. 137; Durège 532.

Diese Enveloppe ist in Linienkoordinaten aufzustellen; sie stellt eine C_4 mit 3 Doppelpunkten dar, also wird die Linienkoordinatengleichung Δ in Linienkoordinaten mal dem Quadrat dieser 3 Doppelpunkte; mithin stellt

$$F_\Delta \{(\alpha a v)\,(\alpha b v)\,(\alpha c v)\,a_y^2 b_y^2 c_y^2\}^2 = 0$$

den zu Θ konjugierten Konnex dar; umgekehrt entspricht je einer Geraden v die Enveloppe des zu v gehörigen Polar-C_2-Büschels in Punktkoordinaten, also das Produkt der 3 zerfallenden C_2 dieses Büschels, und diese findet man durch Elimination von x aus den 3 Gleichungen

$$v_x = 0, \quad \alpha_x^3 = 0, \quad \alpha_x a_y^2 = 0,$$

und diese führt auf die Gleichung

$$(\alpha a v)\,(\alpha b v)\,(\alpha c v)\,a_y^2 b_y^2 c_y^2 = 0.$$

Kehren wir wieder zum Konnexe N zurück, so entsprechen also vermöge des konjugierten Konnexes einem Punkte y die 4 Berührungspunkte der Tangenten von y an die durch y zu legende $C_3(\varkappa\lambda)$, und umgekehrt jeder Geraden v der Ort der Tangentialpunkte der auf v liegenden Punkte x.

Die 4 Berührpunkte der Tangenten von y sind aber die Schnittpunkte der Polar-C_2 von y in bezug auf f und Δ, da sie y zum gemeinsamen Tangentialpunkt haben, folglich sind sie, wenn v die Veränderliche bezeichnet, gegeben durch

$$\Theta_y^2 v_\vartheta^2 \cdot \mathsf{K}_y^2 v_\varkappa^2 - (\mathsf{H}_y^2 v_\eta^2)^2 = 0.$$

Dies ist also die Gleichung des zu N konjugierten Konnexes. Nach C. u. G., Math. Ann. VI p. 485 kann er auch in folgenden Formen geschrieben werden

$$\Theta\mathsf{K} - \mathsf{H}^2 = 2\,(NN'u)^2\,N_x^2 N_x'^2 u_n u_{n'} = -\tfrac{2}{3}\,(f\mathsf{M} - \Delta\Lambda),$$

wo

$$\Lambda = (a N u)^3\,N_x u_n$$
$$\mathsf{M} = (\alpha N u)^3\,N_x u_n$$

bedeutet. Da jeder Geraden u der Ort ihrer Tangentialpunkte entspricht, ist die $C_4 : \Theta\mathsf{K} - \mathsf{H}^2$ das Eliminationsresultat[1]) von y aus

$$\varrho x_i = N_y^4 n_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad u_y = 0$$

also rational; auf u schneidet sie diejenigen 4 Punkte x aus, für die u zugleich Tangente an die durch x gehende $C_3(\varkappa\lambda)$ ist; hieraus folgt: *Die Form*

$$(NN'u)^2\,(Nuv)^2\,(N'uv)^2\,u_n u_{n'} = 0$$

1) Überhaupt lassen sich bei Konnexen $a_x^m u_\alpha$ die Gleichungen, die den konjugierten Konnex definieren,

$$\varrho v_i = a_x^{m-1} a_i u_\alpha, \quad \sigma y_i = a_x^m \alpha_i, \quad a_x^m u_\alpha = 0$$

ersetzen durch die beiden

$$\sigma y_i = a_x^m \alpha_i, \quad v_x = 0,$$

woraus man sieht, daß die Punktkurven sämtlich rational sind.

gibt für festes u die Gleichung der 4 einfachen Schnittpunkte von u mit den 4 u berührenden $C_3(\varkappa, \lambda)$ des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta$.

Diese 4 Punkte sind also die 4 Koinzidenzpunkte des Konnexes

$$(NN'u)^2 N_x^2 N_x'^2 u_n u_{n'}$$

auf u.

Die 4 Koinzidenzstrahlen des Punktes x sind die 4 von x an die durch x gehende $C_3(\varkappa\lambda)$ legbaren Tangenten.

Nun steht das so gewonnene Punktquadrupel auf u in sehr enger Beziehung zu dem Quadrupel der 4 Koinzidenzpunkte von N auf u.

Auf jeder Geraden u der Ebene hat man zunächst 2 Punkttripel, ausgeschnitten von f und Δ, nämlich

$$(auv)^3 = 0 \quad \text{und} \quad (\alpha uv)^3 = 0.$$

Diese entstehen durch Übertragung aus den binären Formen

$$a_x^3 = 0, \quad \alpha_x^3 = 0.$$

Nun ist das simultane System zweier binärer kubischer Formen vollständig aufgestellt und behandelt[1]); man hat daher nur die verschiedenen Relationen zu übertragen, um zur Kurve $a_x^3 = 0$ in wichtiger Beziehung stehende Punktsysteme auf der Geraden u zu erhalten.

Zwischen den Punkttripeln $a_x^3 = 0$ und $\alpha_x^3 = 0$ besteht zunächst die Relation

$$J = (a\alpha)^3 = 0,$$

die sich aus dem identischen Verschwinden von $(a\alpha u)^3$ ergibt. Für zwei beliebige Kurven 3. Ordnung

$$a_x^3 = 0, \quad \alpha_x^3 = 0$$

stellt $(a\alpha u)^3 = 0$ die Enveloppe von Geraden dar, welche von den Kurven des Büschels

$$\varkappa f + \lambda \varphi = \varkappa a_x^3 + \lambda \alpha_x^3 = 0$$

in 4 äquianharmonischen Punkten berührt werden.[2])

Die Kovariante 4. Grades

$$\vartheta = (a\alpha)\, a_x^2 \alpha_x^2$$

gibt die Doppelpunkte der kubischen Involution

$$\varkappa a_x^3 + \lambda \alpha_x^3 = 0$$

und zugleich die Hauptkoinzidenz von $N_x^4 u_n$.

Die zweite Überschiebung von ϑ über sich selbst $(\vartheta, \vartheta)^2 = H$ gibt die Hauptkoinzidenz des zu N konjugierten Konnexes. Da nun

$$i_\vartheta = 0,$$

so hat man auch

---

1) Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgeg. von Dr. Kerschensteiner, p. 330 ff.

2) Gundelfinger, Über das simultane System zweier binärer kubischer Formen, Math. Ann. Bd. VII.

$$(H, H)^4 = i_H = -\frac{i_\vartheta^2}{6} = 0,$$

woraus man schließt:

Die 4 einfachen Schnittpunkte der 4 u berührenden $C_3(\varkappa, \lambda)$ des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta$ bilden die Hessesche Form der 4 Berührpunkte und umgekehrt, und bilden deshalb selbst ein äquianharmonisches Punktquadrupel.

Ebenso sind die Punkte p und π die Koinzidenzpunkte von Λ und M; sie sind definiert durch

$$(\vartheta, f)^3 = -\tfrac{3}{4} p,$$
$$(\vartheta, \varphi)^3 = +\tfrac{3}{4} \pi;$$

beide Formen liefern durch Übertragung

$$(Nau)^3 (Nuv) u_n = -(\Lambda uv) u_\lambda^4,$$
$$(N\alpha u)^3 (Nuv) u_n = -(\mathsf{M}uv) u_\mu^4.$$

Nun ist (p. 348)

$$F = f\pi + \varphi p$$

eine Form, für welche

$$i_F = -4\,\Omega J = 0$$

und

$$H_F = -4\,\Omega\vartheta,$$

die also ϑ zur Hesseschen Form hat, folglich ist diese Form identisch mit der Hauptkoinzidenz des zu N konjugierten Konnexes; es ergibt sich noch aus der Formel

$$j_F = 12\,\Omega \qquad \text{(p. 349)},$$

da

$$2\,\Omega = (p\pi)$$

durch Übertragung ins ternäre Gebiet

$$j_F = +12\,\Psi^2;$$

da

$$(\Lambda \mathsf{M} u) = \tfrac{9}{8}\,\Psi \qquad \text{(vgl. p. 3)},$$

wo Ψ die Gleichung der 9 Wendepunkte darstellt.

In der Tat müssen dann 2 Koinzidenzpunkte des konjugierten Konnexes zusammenfallen, da zugleich $i_F = 0$ also $R_F = 0$ wird, und dies ist nur möglich, wenn die Gerade u durch einen Wendepunkt geht.

Aus dem simultanen System der beiden binären Formen a_x^3 und α_x^3 lassen sich noch eine Reihe von Relationen für die Hauptkoinzidenzen der beiden Konnexe Λ und M ableiten, die später noch benutzt werden sollen.

Auch zeigen diese Überlegungen, wie die Konnexe N, Λ und M definiert werden können, wenn 2 beliebige Kurven 3. Ordnung vorliegen.

Aus der Relation

$$(NN'u)^2\, N_x^3 N_x'^2\, u_n u_{n'} = -\tfrac{1}{3}(f\mathsf{M} - \Delta\Lambda)$$

folgt zunächst, daß sämtliche C_4 dieses Systems durch die 9 Wendepunkte

hindurchgehen; die 3 Doppelpunkte einer C_4 bestimmen sich auf folgende Weise. Doppelpunkt ist ein solcher Punkt, durch den eine $C_3(\varkappa, \lambda)$ geht, für die 2 der von x ausgehenden Tangenten in Punkten von u berühren; dann sind die 2 Berührpunkte ein Polepaar (2 korrespondierende Punkte) dieser $C_3(\varkappa, \lambda)$; nun wird u nur von einer $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ berührt, der 3 Kurven als Hessesche Kurven entsprechen, und jedes so auf u gewonnene Polepaar hat einen Doppelpunkt der C_4 als gemeinschaftlichen Tangentialpunkt.

Man kann sich die C_4 durch 2 Kurvenbüschel entstanden denken; denn die Gleichung

$$f\mathsf{M} - \Delta\Lambda = 0$$

entsteht durch Elimination von $\varkappa$, λ aus

$$\varkappa\Lambda_x + \lambda\mathsf{M}_x = 0$$

und

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0.$$

Die Geraden $\varkappa\Lambda_x + \lambda\mathsf{M}_x$ bilden ein Büschel durch den Punkt $(\Lambda\mathsf{M}v)\,u_\lambda^4\,u_\mu^4 = 0$, der selbst auf den C_4 liegt, und dieser Punkt ist, wie später noch bewiesen werden soll, der Tangentialpunkt des Berührungspunktes der u berührenden $\Sigma_{\varkappa\lambda}$.

Nun ergibt sich direkt, daß jede $C_{3\varkappa\lambda}$ in 3 beweglichen Punkten von der C_4 geschnitten wird, die auf einer Geraden liegen, speziell ergibt sich für $f = 0$:

Die 3 Tangentialpunkte der 3 Schnittpunkte einer Geraden u mit der Kurve f liegen auf der Geraden $\Lambda_x u_\lambda^4$.

Man hat also hier eine sehr einfache Definition für Λ; man hat nur in den Schnittpunkten einer Geraden u mit f die Tangenten an f zu ziehen und ihre weiteren Schnittpunkte mit f durch eine Gerade zu verbinden.

Stellt man die Punkte von f durch Werte eines Parameters t dar (C.-L. p. 602 ff.), dann schneide u in den Punkten t_1, t_2, t_3, so daß also

$$t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'},$$

wenn ω und ω' die Perioden der Kurve sind. Haben dann die Schnittpunkte der Geraden Λ_x die Parameter s_i, so ist

$$s_i \equiv -2\,t_i \pmod{\omega, \omega'},$$

also folgt aus $\Sigma s_i \equiv 0$ nach dem Abelschen Theorem, daß die Tangentialpunkte wieder auf einer Geraden liegen, umgekehrt gehören zu jedem solchen Punkte s_i die Berührpunkte der 4 Tangenten von ihm an f

$$t_i^{(1)} = t_i, \quad t_i^{(2)} = t_i + \frac{\omega}{2}, \quad t_i^{(3)} = t_i + \frac{\omega'}{2}, \quad t_i^{(4)} = t_i + \frac{\omega + \omega'}{2},$$

und diese Punkte lassen sich auf 8 verschiedene Weisen in 4 Geraden anordnen, daß auf je einer 3 verschiedenen Quadrupeln angehörige Punkte liegen; die 16 Geraden sind nämlich

$$
\begin{array}{llll}
t_1^{(1)} t_2^{(1)} t_3^{(1)}, & t_1^{(2)} t_2^{(1)} t_3^{(2)}, & t_1^{(3)} t_2^{(1)} t_3^{(3)}, & t_1^{(4)} t_2^{(1)} t_3^{(4)}, \\
t_1^{(1)} t_2^{(2)} t_3^{(2)}, & t_1^{(2)} t_2^{(2)} t_3^{(1)}, & t_1^{(3)} t_2^{(2)} t_3^{(4)}, & t_1^{(4)} t_2^{(2)} t_3^{(3)}, \\
t_1^{(1)} t_2^{(3)} t_3^{(3)}, & t_1^{(2)} t_2^{(3)} t_3^{(4)}, & t_1^{(3)} t_2^{(3)} t_3^{(1)}, & t_1^{(4)} t_2^{(3)} t_3^{(2)}, \\
t_1^{(1)} t_2^{(4)} t_3^{(4)}, & t_1^{(2)} t_2^{(4)} t_3^{(3)}, & t_1^{(3)} t_2^{(4)} t_3^{(2)}, & t_1^{(4)} t_2^{(4)} t_3^{(1)}.
\end{array}
$$

Man hat also: Die 3 Punktquadrupel, in denen eine C_4 $N_x^3 u_u$ eine $f_{\varkappa\lambda}$ schneidet, sind immer derart gelegen, daß der Verbindungsstrahl eines Punktes des ersten mit einem des zweiten Quadrupels durch einen des dritten geht; man erhält auf diese Weise 16 Geraden, von denen durch jeden der 12 Punkte vier gehen, die sich 8mal zu je 4 derart gruppieren lassen, daß solche 4 Geraden alle 12 Schnittpunkte enthalten.[1])

Geht man von dem konjugierten Konnex

$$(NN'v)^2 N_y^2 N_y'^2 v_n v_{n'} = 0$$

wieder zu $N_y^4 u_n$ zurück vermöge der Formeln:

$$\varrho y_1 = N_x^4 n_i$$
$$\sigma v_1 = N_x^3 N_i u_n,$$

so transformiert sich die Bedingung

$$v_y = 0$$

in

$$\tfrac{1}{3} K = N_{n'} N_x^3 N_x'^4 u_n = 0,$$

also geht die Hauptkoinzidenz des konjugierten Konnexes in die gemeinschaftliche Koinzidenz von N und K über.

Einer Geraden ordnet dieselbe 28 Punkte zu, die bei Behandlung von K noch näher besprochen werden sollen; einem Punkte x die Verbindungslinie NK, also die Tangente an die durch x gehende C_3 im Tangentialpunkt von x.

Weiterhin stehen die Integralkurven des Konnexes

$$(NN'u)^2 N_x^2 N_x'^2 u_n u_{n'}$$

in enger Beziehung zu denen des Konnexes K. Zu jedem Punkt hat man als die 4 Fortschreitungsrichtungen die 4 Tangenten an die durch den Punkt gehende C_3; man kann nun fragen, wenn eine Tangente eine Integralkurve umhüllt, welche Kurve beschreibt der zugehörige Berührpunkt mit der C_3.

Geht man auf der Tangente vom Punkte x zum Punkte $x + dx$ weiter, so rücke der Berührpunkt y nach $y + dy$. Bewegt sich aber der

1) Vgl. Hesse, Über Kurven 3. Ordnung; Crelles Journal 36, Ges. Werke p. 155; Cremona, Ebene Kurven, art. 149. Hesse stellt hier auch wohl zum ersten Male die Gleichung des Konnexes N auf als Kurve, die diese 12 Punkte auf f ausschneidet, in der Form

$$u_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} \right) + \cdots = 0.$$

Auf das System der 16 Geraden wird später noch eingegangen werden.

Tangentialpunkt auf der Geraden u, so bewegt sich der Berührpunkt einer Tangente auf $N_y^4 u_n$ weiter; und da in unserem Falle

$$\varrho u_i = N_y^4 (\widehat{ny})_i,$$

so erhält man für die Fortschreitungsrichtung von y die Differentialgleichung

$$N_y^3 N_{y'}^4 N_{dy} (n n' y) = 0,$$

hieraus wird, da

$$a_y^2 a_n = 0; \quad \alpha_y^2 \alpha_n = 0$$

$$f(mydy) - \Delta(lydy) = (kydy) = 0.$$

Hieraus folgt der Satz:

Bewegt sich ein Punkt auf einer Koinzidenzkurve des Konnexes K, so bewegt sich sein Tangentialpunkt auf einer solchen des zu N konjugierten Konnexes.

§ 5. Der Konnex $K_x^7 u_k$.

Es soll hier noch kurz auf die Verhältnisse bei dem Konnex $K_x^7 u_k$ eingegangen werden. Dieser wird folgendermaßen definiert:

$$K_x^7 u_k = 3 N'_n N_x^3 N'^4_x u_n = L\Delta - Mf + 2\psi u_x \text{ (C.-L. p. 640).}$$

Wie schon aus der Definition dieses Konnexes ersichtlich ist, wird eine vollständige Behandlung erst nach Erledigung der entsprechenden Fragen für L und M möglich sein.[1])

Der Punkt u_k gibt den Schnittpunkt der Tangente der durch x gehenden $C_3 \varkappa\lambda$ im Punkte u_n mit der Polaren von N in bezug auf die Polare C_2 von x. (C.-L. p. 643).

Umgekehrt gibt die C_7 K_x^7 zu einer Geraden u den Ort derjenigen Punkte x, deren lineare Polaren inbezug auf die C_4 $N_x^4 u_n$ durch ihre Tangentialpunkte gehen.

K hat $7^2 + 7 + 1 = 57$ Grundpunkte.

Darunter sind, wie aus der zweiten Definition ersichtlich ist, die neun Wendepunkte; die Grundpunkte sind gegeben durch die Gleichungen

$$(kx)_i = 0 \qquad f.i = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

folglich geht die Kurve $(kxn) = \frac{1}{4} \Gamma$ durch sämtliche hindurch.

Alle Grundpunkte von K liegen auf den 12 Dreiecksgeraden.

Für die Dreieckseckpunkte ist

$$n_i N_x^4 = 0 \qquad i = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

folglich auch

$$k_i K_x^7 = 0,$$

[1]) K ist keine Normalform; es ergibt sich nämlich

$$\sum \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial u_i} = 3 L_x^4 \alpha_l \alpha_x^2 - 3 M_x^4 a_m a_x^2 + 18 \psi = 12 \psi.$$

d. h. sämtliche Kurven $K_x^7 u_k$ gehen durch die 12 Dreieckseckpunkte hindurch, folglich sind dies auch 12 Grundpunkte von K.

Von den übrigen Grundpunkten liegen auf jeder Dreiecksgraden drei, und dies sind die Schnittpunkte der drei zur entsprechenden Dreiecksgeraden gehörenden harmonischen Geraden. Die Grundpunkte sind nämlich zugleich Doppelpunkte der Kurve Φ', und diese wird, wie sogleich zu zeigen ist;

$$\Phi' = \tfrac{3}{8}\, \Omega\, \Gamma,$$

woraus die Behauptung folgt.

Die Verhältnisse liegen also folgendermaßen:

Die 12 Dreiecksgeraden und die 9 harmonischen Geraden erzeugen ein 57-Eck; 21 Geraden schneiden sich im allgemeinen in 210 Punkten; von diesen absorbiert:

ein Wendepunkt $\binom{4}{2} = 6$ Punkte, weil sich in jedem Wendepunkt vier Dreiecksgeraden schneiden, die Wendepunkte zusammen also 54 Punkte;

ein Dreieckseckpunkt $\binom{5}{2} = 10$ Schnittpunkte, weil sich in ihm zwei Dreiecks- und drei harmonische Geraden schneiden, die Dreiecksecken zusammen also 210 Punkte; mithin bleiben noch 36 einfache Schnittpunkte von Ω und Γ.

Die Kurve Φ' vom Grade 21 in x mit drei Symbolen K wird gegeben durch

$$\Phi' = K_{k''}\,(k\,x\,k')\,K_x^{\,6}\,K_x'^{\,7}\,K_x''^{\,7}.$$

Zur Reduktion dieser Form hat man nach C. u. G. M. A. I. p. 77 (60)

$$\sum \frac{\partial K}{\partial x_i}\, k_i = \frac{21}{2}\, N\Omega + 6\,\psi\, K + 9\left(\psi^2 - \frac{S^*}{96}\right) u_x = 7\, K_{k''}\, K_x^{\,6}\, K_x''^{\,7}\, u_k,$$

wenn $S^* = S_{A,\,-f}$ bedeutet.

Für $u_i = (kx)_i$ kommt also:

$$7\,\Phi' = \frac{21}{2}\,(k\,x\,n)\,\Omega + 6\,\psi\,(k\,x\,k') + 9\left(\psi^2 - \frac{S^*}{96}\right)(x\,x\,k)$$

also:
$$\underline{\Phi' = \tfrac{3}{2}\,(k\,x\,n)\,\Omega = \tfrac{3}{8}\,\Omega\,\Gamma.}$$

Auch die Kurve F'' können wir, geometrisch wenigstens, angeben, sie ist vom Grade $(m-1)\,(m+2) = 48$ in x, und muß wegen der eindeutigen Beziehung ihrer Tangenten zu den Punkten von Φ' ebenfalls zerfallen.

Zu den Dreieckseckpunkten gehören als gemeinschaftlichen Punkten aller Kurven K als Koinzidenzgeraden alle Geraden durch sie selbst; und da die Dreieckseckpunkte auf Φ' liegen, die Koinzidenzstrahlen der Punkte von Φ' aber F'' umhüllen, so enthält F'' die Gleichung der 12 Dreieckseckpunkte: $\Gamma = 0$ als Faktor. Als zweiter Bestandteil ist nun aber bloß die Form der neun Wendepunkte in geeigneter Potenz (also Ψ^3) möglich; denn geht man von einem Wendepunkt auf einem Strahl weiter, so ist dieser Wendetangente einer Kurve C_3 und der Koinzidenzstrahl des unendlich benachbarten Punktes ist wieder die Wendetangente; also ist diese

Wendetangente einer Integralkurve. Natürlich treten wie bei jedem Konnex $(m, 1)$ die 57 Grundpunkte als singuläre Lösung der Differentialgleichung der Hauptkoinzidenz auf, wenn diese in Linienkoordinaten gegeben wird; sie können ja als Enveloppe der Integralkurven angesehen werden; stellt man nun die Differentialgleichung in Punktkoordinaten auf, so wird sie von

$$\Omega = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma = 0$$

identisch befriedigt. Es ergibt ja auch die geometrische Definition direkt, daß der Koinzidenzstrahl eines beliebigen Punktes der Wendepunktsdreiseite die durch den Punkt gehende Dreiecksgerade ist, und ebenso wird später gezeigt werden, daß

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} l_i \equiv 0 \quad \text{und} \quad \sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} m_i \equiv 0 ,$$

woraus folgt, daß die Koinzidenzstrahlen der Punkte von Ω die Geraden von Ω selbst sind.

Die Kurven K können auch als Jakobische Kurven von N, f und Δ definiert werden, denn es ist:

$$\sum \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial N}{\partial u_i} = \tfrac{1}{9} \sum \pm \frac{\partial N}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = \tfrac{4}{3} K .$$

Die Kurven K haben die Dreieckseckpunkte und nur diese zu gemeinschaftlichen Punkten; für solche Punkte muß nämlich

$$k_i K_x^{\tau} = 0 \qquad i = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

sein, also müssen sie sich unter den Grundpunkten befinden. Nun sind unter den Grundpunkten solche zu unterscheiden, deren zugeordneter Punkt unbestimmt wird, und solche für die er in den Punkt selbst hineinfällt; nur die Punkte der ersten Art können als gemeinsame Punkte des Netzes in Betracht kommen.

Für die Wendepunkte fällt aber der zugeordnete Punkt in den Wendepunkt selbst hinein, denn die Wendepunkte sind definiert durch

$$\varrho\, x_i = n_i N_x^4 \qquad i = 1 \cdot 2 \cdot 3 ;$$

dies ergibt für

$$\sigma k_i = N_{n'} N_x^3 N_{x'}^4 n_i$$
$$\tau k_i = N_x^4 n_i = \varrho\, x_i .$$

Ebenso wenig können die 36 übrigen Schnittpunkte von Ω und Γ dieser Bedingung genügen; denn ihre zugeordneten Punkte müssen sowohl auf Ω als auf Γ fallen, fallen also in die Punkte selbst hinein.

$K_x^{\tau} u_k$ schneidet $N_x^4 u_n$ in 28 Punkten, von denen 12 in die Dreieckseckpunkte fallen; es bleiben also noch 16 bewegliche Schnittpunkte, und diese sind geometrisch sehr einfach festzulegen.

K gibt nämlich die Bedingung, daß der Tangentialpunkt des Punktes x auf der linearen Polaren von x in bezug auf $N_x^4 u_n$ liegt. Ist aber x ein Punkt der C_4, so ist seine lineare Polare $N_x^3 N_y$ die Tangente in x;

diese Tangente an $N_x^4 u_n$ in x muß also durch den Tangentialpunkt von x gehen, sie schneidet also diesen Punkt auf u aus; die durch x gehende C_3 berührt also die C_4 in x. Von den 12 Schnittpunkten dieser C_3 mit $N_x^4 u_n$ fallen 2 zusammen; die 12 Schnittpunkte sind aber in 3 Punktquadrupel derart einzuteilen, daß jedes Quadrupel einen der Schnittpunkte der C_3 mit u zum gemeinschaftlichen Tangentialpunkt hat; und da, wie früher gezeigt wurde, 2 Punkte eines solchen Quadrupels im allgemeinen nicht zusammenfallen können, müssen überhaupt 2 Quadrupel zusammenfallen; dann fallen auch ihre Tangentialpunkte auf u zusammen, die durch x gehende C_3 berührt u, eine solche C_3 berührt dann aber die C_4 $N_x^4 u_n$ in 4 Punkten und schneidet sie außerdem noch in 4 Punkten, deren Tangentialpunkt ihr einfacher Schnittpunkt mit u ist. Solcher u berührender C_3 gibt es 4; wir kommen also zu folgendem Satz: *Jede* $C_4 N_x^4 u_n$ *wird von den 4 u berührenden* C_3 *des Büschels* $\varkappa f + \lambda \Delta$ *in je 4 Punkten berührt; durch diese 16 Punkte geht die Kurve* $K_x^7 u_k$ *hindurch, welche außerdem* $N_x^4 u_n$ *nur noch in den 12 Dreieckseckpunkten schneidet.*

Im folgenden werden außer den bisher abgeleiteten Resultaten auch mehrfach diejenigen benutzt, die sich durch dualistische Übertragung für den Konnex N ergeben, wo

$$\mathsf{N} = (s\,t\,x)\,u_s^2\,u_t^2$$

bedeutet; geht man von der Schar $\varkappa \Pi + \lambda P$ aus, so hat man

$$N^{(\varkappa \Pi + \lambda P)} = -\frac{R^2}{3} S_{\varkappa\lambda}\mathsf{N}. \quad \text{M. A. VI. p. 503 (III).}$$

II. Teil.

Die Konnexschar $\varkappa L + \lambda M$.

Bei Behandlung des zu N konjugierten Konnexes hat sich für $\Lambda_x u_\lambda^4$ schon folgende geometrische Bedeutung ergeben: *Die Gerade Λ_x ist die Verbindungslinie der Tangentialpunkte der Schnittpunkte von u mit f.*

Hieraus folgt nach der Formel

$$-\tfrac{2}{9} R^3 S L = \Delta^{(\Pi)} \qquad \text{(M. A. VI. p. 506 (118))}$$

für L:

L ist Schnitt der Tangentialgeraden[1]) *der 3 von x an Π gehenden Tangenten.*

Hiermit ist die enge Beziehung von L zur Kurve Π gekennzeichnet; doch da man L und M gewöhnlich vom Kurvenbüschel $\varkappa f + \lambda \Delta$ ausgehend zu definieren pflegt, sollen L und M zunächst in ihrer Beziehung zum Kurvenbüschel behandelt werden; daran wird sich dann die Untersuchung der Konnexschar $\varkappa \Lambda + \lambda M$ reihen, so daß die Resultate durch dualistische Übertragung leicht verifiziert werden können.

§ 1. Die Punkte u_l und u_m.

L und M sind folgendermaßen definiert (C.-L. p. 633):

$$L = a_n a_x (a N u) N_x^3$$
$$M = \alpha_n \alpha_x (\alpha N v) N_x^3,$$

bildet man die Elementarkovarianten:

$$a_n (a N u) (a N v) N_x^2 \equiv 0 \qquad \text{(C. u. G. Math. Ann. VI. 477.)}$$

und

$$\alpha_n (\alpha N u) (\alpha N v) N_x^2 \equiv 0,$$

so sieht man, daß geschrieben werden darf:

$$L_x^3 \; L_y u_l = a_n a_y (a N u) N_x^3 = a_n a_x (a N u) N_x^2 N_y$$
$$M_x^3 \, M_y u_l = \alpha_n \alpha_y (\alpha N u) N_x^3 = \alpha_n \alpha_x (\alpha N u) N_x^2 N_y.$$

---

1) Die Gerade, die vom Berührungspunkte einer Geraden u mit der zugehörigen $\Pi_{\varkappa\lambda}$ noch an diese als Tangente gezogen werden kann, bezeichne ich kurz als Tangentialgerade von u.

Dualistisch ergeben sich für Λ und M die Definitionen

$$L^{(\varkappa \Pi + \lambda P)} = -\tfrac{1}{9} R^3 S_{\varkappa\lambda} \quad (\varkappa \Lambda + \lambda \mathsf{M}). \quad \text{(Math. Ann. VI. p. 505.)}$$

L und M stehen in der Beziehung zu einander, daß

$$\delta L = M; \qquad \delta M = \frac{S}{2} L$$

wird, woraus sich ergibt, daß Kombinanten des Büschels $\varkappa L + \lambda M$ Kombinanten von f sind.

Die Konnexe sind auch sogenannte Normalformen; d. h. es ist

$$L_l L_x^{\,3} \equiv 0; \qquad M_m M_x^{\,3} \equiv 0,$$

wie aus den vorstehenden Formeln sofort ersichtlich ist.

Die Formeln

$$a_x a_n a_i \equiv 0$$
$$\alpha_x \alpha_n \alpha_m \equiv 0 \quad \text{(C.-L. p. 639 (34)).}$$

zeigen zunächst, daß der Punkt $\varkappa u_l + \lambda u_m$ auf der Geraden

$$\varkappa a_x a_n a_z + \lambda \alpha_x \alpha_n \alpha_z = 0$$

liegt; d. h. auf der Polaren des Punktes N in bezug auf den Polar C_2 von x, gebildet für $\varkappa f + \lambda \Delta$; diese Gerade ist zugleich Tangente in x an den Polar C_2 von u_n.

Die Polarkegelschnitte eines Punktes N inbezug auf alle Kurven des Büschels

$$\varkappa f + \lambda \Delta = 0$$

schneiden sich in 4 Punkten, die N zum gemeinschaftlichen Tangentialpunkt haben; die Tangente in einem solchen Punkte x an den Polar C_2 von $\varkappa f + \lambda \Delta$ ist der Koinzidenzstrahl von x in bezug auf $\varkappa L + \lambda M$.

Sucht man die linearen Pole einer Geraden

$$\varrho u_i = (\widehat{x\, n})_i$$

in bezug auf Σ und ebenso auf T, so findet man mit Hilfe der von C. und G. Math. Ann. VI. p. 466 gegebenen Formeln leicht die Punkte

$$L(Sf^2 - 2\Delta^2) - 4Mf\Delta = 0$$

und

$$L\left(\tfrac{4}{9} f^2 T - \tfrac{2}{3} Sf\Delta\right) - M\left(\tfrac{1}{9} f^2 S - \tfrac{2}{3}\Delta^2\right) = 0.$$

Beide Punkte liegen also auf der Verbindungslinie $L - M$. Also ist die Gerade $L - M$ die Verbindungslinie aller linearen Pole der Geraden $x - N$ in bezug auf die K_3 der Schar

$$\varkappa \Sigma + \lambda \mathsf{T} = 0,$$

die Gerade $\overline{L - M}$ ist also identisch mit der Geraden:

$$\mathsf{N}_y (n\, x\, v)\,(n'\, x\, v)\,(n''\, x\, v)\,(n'''\, x\, v) = \mathsf{N}_y \{\!\{n\, x\, v\}\!\}^4.$$

Man hat also das Resultat:

Die Punkte $\varkappa L + \lambda M$ *liegen auf der Tangentialgeraden der Geraden* $x - N$.

Diese Tangentialgerade von $x - N$ *ist nun identisch mit der linearen Polaren von* x *in bezug auf* Ω.

Um dies zu beweisen, benutze ich die von Clebsch und Gordan Math. Ann. Bd. I angegebene Methode zur Berechnung von Kovarianten als Funktion der 7 Grundformen: u_x, N, K, f, Δ, ψ, Ω. Aus den Gleichungen

$$K = L\Delta - Mf + 2\psi u_x$$

und

$$\tfrac{3}{2}\Omega N = u_x\left(\psi^2 - \frac{S^*}{96}\right) - \tfrac{1}{4}(\Gamma_1 M - \Gamma_2 L) - \psi(Mf - L\Delta) \qquad \text{(C.-L. p. 639.)}$$

ergibt sich:

$$\Gamma L = \Gamma_1(K - 2\psi u_x) - 4f((\psi^2 + \tfrac{1}{96}S^*)u_x - \psi K + \tfrac{3}{2}\Omega N)$$
$$\Gamma M = \Gamma_2(K - 2\psi u_x) - 4\Delta((\psi^2 + \tfrac{1}{96}S^*)u_x - \psi K + \tfrac{3}{2}\Omega N),$$

hieraus folgt:

$$\frac{\Gamma}{4}(l\,m\,y) = (k\,x\,y)\left(\psi^2 - \frac{S^*}{96}\right) - \tfrac{3}{2}\Omega(k\,n\,y) + 3\psi\Omega(x\,n\,y);$$

nun ist (C. u. G. Math. Ann. I. p. 63)

$$\psi^2 - \frac{S^*}{96} = \tfrac{1}{6}\sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} n_i$$
$$3\psi\Omega = \tfrac{1}{6}\sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} k_i$$
$$\tfrac{3}{2}\Omega = \tfrac{1}{6}\sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} x_i,$$

mithin hat man:

$$\tfrac{3}{2}\Gamma(l\,m\,y) = \sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i}((k\,x\,y)\,n_i + (n\,k\,y)\,x_i + (x\,n\,y)\,k_i)$$
$$= (k\,x\,n)\sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} y_i = \frac{\Gamma}{4}\sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} y_i,$$

und schließlich:

$$\underline{(l\,m\,y)\,L_x^4\,M_x^4 = \tfrac{1}{6}\sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} y_i},$$

Aus dieser Formel ergeben sich die später noch häufig zu benutzenden Gleichungen:

$$\sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} l_i = 0$$
$$\sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} m_i = 0.$$

Da nun der Punkt $\varkappa L + \lambda M$ durch

$$\varkappa a_x a_n a_y + \lambda \alpha_x \alpha_n \alpha_y = 0,$$

auf

$$\sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} y_i = 0$$

ausgeschnitten wird, kann man setzen

$$\varkappa a_x a_n (\Omega a u) + \lambda \alpha_x \alpha_n (\Omega \alpha u) = C(\varkappa L + \lambda M)\Omega,$$

wo jetzt nur noch die Konstante C zu bestimmen ist.

Zu diesem Zweck führen wir direkt

$$a_x a_n (\Omega a u) \quad \text{auf} \quad C L \Omega$$

zurück, da

$$\tfrac{1}{9} \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 2 N_{n'} N'_{n''} N''_n N_x^2 N_i N_x'^3 N_x''^3 \quad \text{(vgl. p. 8)},$$

so wird

$$a_x a_n (\Omega a u) = 2 a_x a_{n'''} N_{n'} N'_{n''} N''_n (N a u) N_x^2 N_x'^3 N_x''^3 N_x'''^4;$$

wendet man nun die Identität an

$$(Nau) N'''_x = (Na N''') u_x - (NuN'') a_x + (auN''') N_x,$$

so bekommt man drei Ausdrücke:

Der erste heißt

$$a_x a_{n'''} (aN''' N) N_{n'} N'_{n''} N''_n N_x^2 N_x'^3 N_x'''^3 = \tfrac{1}{18} \sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} l_i = 0;$$

der zweite wird

$$a_x^2 a_{n'''} (NuN''') N_{n'} N'_{n''} N''_n N_x^2 N_x'^3 N_x''^3 N_x'''^3,$$

er entsteht aus

$$a_x^2 a_{n'''} (vuN''') N_x'''^3$$

für

$$v_i = N_{n'} N'_{n''} N''_n N_x^2 N_i N_x'^3 N_x''^3 = \tfrac{1}{18} \frac{\partial \Omega}{\partial x_i};$$

nun ist

$$a_x^2 a_n N_x^4 \equiv 0, \qquad \text{(C.-L. p. 635 (14).)}$$

mithin

$$a_x^2 a_n N_x^3 N_y = -\tfrac{1}{2} a_x a_y a_n N_x^4,$$

also wird

$$a_x^2 a_{n'''} N_x'''^3 (vuN''') = -\tfrac{1}{2} a_x (avu) a_n N_x^4$$

und der zweite Ausdruck

$$\tfrac{1}{4} a_x (\Omega a u) a_n.$$

Der dritte Teil zerfällt direkt; er heißt

$$-a_x a_{n'''} (aN'''u) N_x'''^3 \cdot \frac{\Omega}{2} = -\frac{L\Omega}{2},$$

mithin hat man

$$a_x a_n (\Omega a u) = -\tfrac{2}{3} L \Omega.$$

Dualistisch entsprechend gehen die Geraden $\varkappa \Lambda_x + \lambda \mathsf{M}_x$ sämtlich durch den Tangentialpunkt des Berührpunktes der u berührenden $\Sigma_{\varkappa\lambda}$, und dies ist der lineare Pol von u in bezug auf Ψ.

§ 2. Die Kurven $\varkappa L_x^4 + \lambda M_x^4$.

Einer Geraden u wird durch L eine C_4

$$L_x^4 u_i = 0$$

zugeordnet; diese kann man sich zunächst durch 2 Kurvenbüschel ent-

standen denken; zu einem Punkt y von u gehört nämlich eine Punktgruppe, bestimmt durch Schnitt der C_8

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} y_i = 0$$

mit der C_5

$$a_x a_n a_y = 0.$$

Diese beiden Kurvenbüschel erzeugen L zugleich mit Ω.

Aus der Gleichung

$$a_x a_n a_y = -\tfrac{2}{3}(lxy) \qquad \text{(C.-L. p. 639)}$$

ergibt sich, daß das Netz der $C_5\, a_x a_n a_y$ mit dem Netz X_y des Konnexes L identisch ist.

$a_x a_n a_y = 0$ gibt die Bedingung, daß der Punkt x und sein Tangentialpunkt zu dem $C_2\, a_y a_x^2$ konjugiert sind; da für die 12 Dreieckspunkte

$$n_i N_x^4 = 0 \quad i = 1, 2, 3,$$

so gehen alle X_y durch die 12 Dreieckseckpunkte hindurch. Mithin ergibt sich: *12 der 21 Grundpunkte des Konnexes L werden gebildet von den 12 Dreieckspunkten.*

Um die übrigen 9 Grundpunkte zu finden, gehen wir aus von einem andern Konnex, der die gleiche Hauptkoinzidenz hat wie L, nämlich dem Konnex

$$\Theta_x^2 u_\vartheta \alpha_\vartheta \alpha_x^2 = 0.$$

Nach C. u. G., Math. Ann. Bd. VI p. 504 (105) ist nämlich

$$L = \tfrac{3}{4}\Theta_x^2 u_\vartheta \alpha_\vartheta \alpha_x^2 - \tfrac{1}{24} S f u_x.$$

Dieser Konnex ordnet jedem Punkt x einen Punkt y folgendermaßen zu. Man nehme die Polare C_2 von x in bezug auf f und Δ, zeichne die Polare von x in bezug auf $\Delta_x \Delta_y^2$ und nehme den Pol derselben in bezug auf $f_x f_y^2$; der Strahl $\widehat{xy}$ ist dann Koinzidenzstrahl des Punktes x.

Soll x Grundpunkt des Konnexes $\Theta_x^2 u_\vartheta \alpha_\vartheta \alpha_x^2$ werden, so muß es unendlich viele Koinzidenzstrahlen haben, dann fällt entweder y in x, oder zu x gehören unendlich viele Punkte y. Das erstere tritt, wie ersichtlich, ein für die 12 Dreieckspunkte[1]); es ist also bloß der zweite Fall zu untersuchen.

Die lineare Polare eines Punktes x in bezug auf eine C_2 ist nun aber immer bestimmt, welche Singularitäten auch die C_2 haben mag, so lange x nicht in den Doppelpunkt fällt (was ja in unserm Fall ausgeschlossen ist); es kann also bloß der Pol dieser Geraden in bezug auf $a_x a_y^2$ unbestimmt werden; dann muß aber die C_2 zerfallen, x also ein Punkt von Δ sein.

---

1) Die Polarkegelschnitte eines Dreieckspunktes in bezug auf f und Δ berühren nämlich die beiden durch den Punkt gehenden Dreiecksseiten im Schnitt mit der dritten.

Ist x ein Punkt von Δ, so liegt der Doppelpunkt der C_2 ebenfalls auf Δ, und die lineare Polare von x in bezug auf Δ ist die Tangente an Δ im Punkte x; dann wird der Pol dieser Geraden unbestimmt, wenn sie durch den Doppelpunkt y hindurch geht; sie hat dann unendlich viele Pole, die auf der vierten harmonischen Geraden zu ihr in bezug auf die Geraden der C_2 liegen; dann ist x Grundpunkt.

Da nun $x - y$ als Verbindungslinie zweier konjugierter Punkte von Δ Tangente an Σ ist, so liegt x auf einer gemeinschaftlichen Tangente von Σ und Δ; also auf einer Wendetangente von f.

Wendepunkt kann x nicht sein, da sonst der Koinzidenzstrahl die Wendetangente, also bestimmt wäre, folglich ist x Schnittpunkt der Wendetangente mit der harmonischen Geraden des Wendepunktes.

Man hat also:

Die übrigen 9 Grundpunkte des Konnexes L sind die 9 Berührpunkte von Δ und Σ.

Denn aus der Gleichung

$$F_\Delta = -\frac{S^2}{12} F + \Sigma(\tfrac{2}{3} S\mathsf{T} - \tfrac{4}{9} T\Sigma) \quad \text{(C. u. G. p. 508 (129))}$$

folgt, daß die gemeinsamen Tangenten von f und Δ mit Σ zugleich gemeinsame Tangenten von f und Δ sind. Da nun Σ die Wendetangenten von f im Schnitt mit der zugehörigen harmonischen Geraden berührt, so zählt diese Tangente als Tangente von f und Σ doppelt; die Wendetangenten von f sind aber einfache Tangenten von Δ, sollen sie deshalb als gemeinsame Tangenten von Δ und Σ doppelt zählen, so müssen sich Δ und Σ berühren, Δ also die Wendetangenten im Schnitt mit der harmonischen Geraden berühren.[1])

Man kann dies Resultat noch etwas anders darstellen. Es gilt nämlich: *Die Rückkehrpunkte von Π sind die 9 Berührpunkte von Δ und Σ;* hier ist

$$\Pi = S\mathsf{T} - T\Sigma.$$

Geometrisch ist Π bekanntlich dadurch definiert, daß ihr Polarkegelschnittgewebe mit dem Polarkegelschnittnetz von f vereinigt liegt. Ist daher Δ die Hessesche, Σ die Cayleysche Kurve von f, so ist Σ die Hessesche und Δ die Cayleysche Kurve von Π[2]); dies ergibt sich auch aus den Formeln

$$\Delta^{(\varkappa\Pi + \lambda P)} = \frac{R^2}{3} \Sigma_{\varkappa\lambda} \quad \text{(M. A. VI p. 496)}$$

$$\Sigma^{(\varkappa\Pi + \lambda P)} = -\tfrac{2}{3} R^2 \Delta_{\varkappa\lambda}.$$

Wie nun die Wendetangenten von f durch die gemeinsamen Punkte von Σ und Δ gehen und hier beide Kurven berühren, so müssen die

1) Vgl. Schröter, Über Kurven dritter Ordnung, Math. Ann. V p. 77.

2) Vgl. Rosanes, Über Systeme von Kegelschnitten, Math. Ann. Bd. VI; auch C.-L. p. 577.

Rückkehrpunkte von Π gemeinsame Punkte von Σ und Δ sein; mit andern Worten, wie die Resultante von Δ (in Linienkoordinaten) und Σ auf die Gleichung der 9 Wendetangenten führt, so führt die Resultante von Δ und Σ (in Punktkoordinaten) auf die Gleichung der 9 Rückkehrpunkte von Π.

Π ist also diejenige Kurve der Schar $\varkappa\Sigma + \lambda\mathsf{T}$, deren Rückkehrpunkte auf den Wendetangenten von f liegen.

Für unsere Konnexe hat man also folgendes Resultat:

Die 21 Grundpunkte des Konnexes $\varkappa L + \lambda M$ setzen sich zusammen aus den 12 Dreieckseckpunkten und den Rückkehrpunkten von $\Pi_{\varkappa\lambda} = \varkappa\Pi + \lambda P$.

Und dualistisch: *Die 21 Grundstrahlen des Konnexes $\varkappa\Lambda + \lambda\mathsf{M}$ werden gebildet von den 12 Dreiecksgeraden und den 9 Wendetangenten von $f_{\varkappa\lambda} = \varkappa f + \lambda\Delta$.*[1])

Die $C_5\ a_x a_n a_y$ bilden also ein Netz mit den 12 Dreieckseckpunkten und den 9 Berührpunkten von Σ und Δ als gemeinschaftlichen Punkten; jede C_5 geht durch y und schneidet auf den durch y gehenden Strahlen außerdem die Koinzidenzpunkte von L aus.

Liegt y auf einer harmonischen Geraden, so zerfällt die C_5 in die harmonische Gerade und eine C_4; denn auf der harmonischen Geraden liegen 5 Grundpunkte; folglich muß die C_5 6 Punkte mit ihr gemein haben, enthält sie also ganz. Die C_4 bilden dann ein Büschel durch die übrigen 8 Dreieckspunkte und die übrigen 8 Rückkehrpunkte von Π.

Ist y Schnitt zweier und damit dreier harmonischer Geraden, also Dreieckseckpunkt, so zerfällt die C_5 in diese 3 harmonischen Geraden und eine C_2, die durch die übrigen zwei nicht auf der harmonischen Geraden liegenden Dreiecksecken und die noch übrigen 6 Rückkehrpunkte von Π geht.

Hierbei ergibt sich nebenbei der an sich nicht uninteressante Satz:

Zieht man die durch 2 beliebige Dreieckseckpunkte eines Wendepunktdreiseits gehenden 6 harmonischen Geraden, so liegen die 6 auf diesen Geraden liegenden Rückkehrpunkte irgend einer Kurve der Schar $\varkappa\Pi + \lambda P$ immer mit diesen 2 Dreieckseckpunkten auf einem Kegeschnitt; und dualistisch:

2 Seiten eines Wendepunktsdreiseits und die 6 Wendetangenten einer Kurve des Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta$, der auf diesen Seiten liegenden Wendepunkte, werden von ein und demselben Kegelschnitt berührt.

Das Netz der C_8 kann auf zweierlei Arten geometrisch definiert werden; es heißt

$$\Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} y_i = 0 \quad \text{und} \quad \mathsf{N}_y(\!(nxv)\!)^4 = 0\,.$$

Die zweite Definition liefert direkt die Konstruktion. Man konstruiere

---

1) Die Gleichung der 9 Wendetangenten von f lautet nach Clebsch (Crelles Journal Bd. 58 (229 ff.)) in unserer Bezeichnung

$$\Delta^3 + \tfrac{15}{2} S f^2 \Delta + 3 T f^3 + 36 f \psi = 0\,.$$

die $\mathsf{K}_4 \mathsf{N}_y u_n^4$ und suche auf jeder Tangente die 4 Koinzidenzpunkte von N; auf diese Weise erhält man auf jeder Tangente 8 Punkte; denn außer den 4 Koinzidenzpunkten von N gibt es noch 4 andere Punkte auf derselben, deren Koinzidenzstrahlen in bezug auf N die $K_4 \mathsf{N}_y u_v^4$ berühren; alle Strahlen, die Koinzidenzpunkte auf der Geraden u haben, berühren ja die K_5

$$(Nuv)^4 v_n = 0.$$

Diese hat zunächst mit

$$\mathsf{N}_y u_v^4 = 0$$

20 Tangenten gemein, von denen 12 in die Dreiecksgeraden fallen (vgl. p. 5 u. 6), und 4 fallen in u als 4fache Tangente von $(Nuv)^4 v_n$; mithin bleiben noch 4 übrig.

Zu einer Geraden gehört eine Schar solcher $K_4 : \mathsf{N}_y u_v^4$ mit 16 gemeinschaftlichen Tangenten; 12 sind die Dreiecksseiten, die 4 andern ergeben sich folgendermaßen: Die Gerade wird von einer $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ berührt, die sie noch in 4 Punkten schneidet, die Tangenten in diesen Punkten an die $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ sind die gesuchten Geraden, auf jeder solchen Geraden liegen 4 Koinzidenzpunkte von N, durch die alle C_8 des der Geraden u entsprechenden Büschels hindurchgehen müssen.

Nun müssen die C_8 $\sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} y_i$ in allen Dreiecksecken als erste Polaren von Ω Doppelpunkte haben (C.-L. p. 322); es ergibt sich also:

Alle C_8 des Netzes $\sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} y_i$ haben in den 12 Dreiecksecken Doppelpunkte, so daß in eine solche 4 Basispunkte eines dem Netz angehörigen Büschels hineinfallen.

Zu einer Geraden u gehört ein Büschel von C_8

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} y_i = 0; \quad u_y = 0$$

mit 64 Basispunkten, von denen 48 in die 12 Dreiecksecken fallen; die weiteren 16 bestimmen sich als Koinzidenzpunkte von N auf den 4 Tangenten, die in den Schnittpunkten von u an die u berührende $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ gezogen werden können.

Im allgemeinen haben die C_8 keine weiteren Doppelpunkte mehr; denn die Gleichungen

$$\sum_i \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_k} y_i = 0, \quad f_k = 1, 2, 3$$

führen durch Elimination von y auf

$$\left| \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_k} \right| = 0 = 2^{10} \cdot 3^5 R \Omega G \quad \text{(C. u. G., Math. Ann. I p. 82).}$$

Ist dagegen y ein Punkt von Ω, so zerfällt die C_8 in die durch diesen Punkt gehende Gerade von Ω und eine C_7.

Die beiden zur Erzeugung von $L \cdot \Omega$ benutzten Kurvenbüschel haben nun nur 16 bewegliche Schnittpunkte; denn 24 Schnittpunkte der C_8

und C_5 fallen immer in die Dreiecksecken. Diese 16 beweglichen Schnittpunkte liegen nun im allgemeinen *sämtlich* auf $L_x^4 u_l$. Denn die C_8 können Ω nur in den 12 Dreiecksecken schneiden; nur für die 9 Schnittpunkte von u mit Ω selbst trennt sich nach den vorigen Erörterungen sowohl von der entsprechenden C_8 wie C_5 die durch diesen Punkt gehende Gerade von Ω ab, so daß hierdurch die gleichzeitige Entstehung von Ω erklärt ist. Die C_8 haben mit $L_x^4 u_l$ 32, die C_5 20 Schnittpunkte; es liegen also 16 feste Punkte der C_8 auf der C_4, und dies sind die schon früher besprochenen Basispunkte des Büschels; die 4 festen Punkte der C_5 sind die Koinzidenzpunkte von L auf u.

Die 16 Basispunkte des Büschels der C_8, die nicht in Dreiecksecken fallen, sind demnach die 16 Basispunkte des Büschels

$$\varkappa L_x^4 u_l + \lambda M_x^4 u_m = 0.$$

In diesem Büschel gibt es eine in 4 Geraden zerfallende C_4. Die 16 Basispunkte waren nämlich die Koinzidenzpunkte von N auf 4 bestimmten Geraden; diese C_4 entspricht dualistisch den 4 Berührungspunkten der Tangenten von x an die durch x gehende C_3 des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta$; und diese 4 Punkte waren gegeben in der Form:

$$f\mathsf{M} - \Delta\mathsf{\Lambda} = 0.$$

Man kommt also auf die Form

$$\Pi M - PL = 0,$$

und dies ist die Gleichung des zu N konjugierten Konnexes.

Dualistisch entsprechend hat man ebenso:
die 16 gemeinschaftlichen Tangenten der Schar

$$\varkappa \mathsf{\Lambda}_x u_\lambda^4 + \lambda \mathsf{M}_x u_u^4 = 0$$

sind die 16 nicht in Dreiecksgeraden fallenden gemeinschaftlichen Tangenten der Schar

$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} v_i = 0; \quad v_x = 0$$

oder die Koinzidenzstrahlen der 4 Punkte

$$\Theta\mathsf{K} - \mathsf{H}^2 = 0$$

in bezug auf den Konnex $\mathsf{N}_x u_v^4$.

§ 3. Die Formen Φ' und Φ für die Konnexe $\varkappa L + \lambda M$ und $\varkappa \mathsf{\Lambda} + \lambda \mathsf{M}$.

Φ'_L ist der Ort der Wendepunkte der Integralkurven von L und in Symbolen L gegeben durch

$$\Phi' = (ll'x) L_{v''} L_x^3 L_x'^4 L_x''^4.$$

Die 21 Grundpunkte von L sind jedenfalls Doppelpunkte dieser Kurve; da nun für einen Punkt von Ω immer die Geraden von Ω als Koinzidenz-

geraden auftreten, so muß sich notwendig Ω absondern; es bleibt noch eine C_3 übrig, und dies muß Δ sein, da Φ' im ganzen nur 15 Symbole hat.

Man hat also:

Der Ort der Wendepunkte der Integralkurven der Konnexschar $\varkappa L + \lambda M$ ist $\Omega \cdot \Delta_{\varkappa\lambda} = \Omega \cdot (G_1 \Delta - G_2 f)$.

Und dualistisch: *Der Ort der Rückkehrtangenten der Integralkurven der Konnexschar* $\varkappa \Lambda + \lambda \mathsf{M}$ ist $\Psi \cdot \Sigma_{\varkappa\lambda}$.

Um nun die Formel

$$(ll'x) L_{y'} L_x^{\,3} L_x'^{\,4} L_x''^{\,4} = C \Omega \Delta$$

auch rechnerisch zu erweisen, benutze ich die von Clebsch und Gordan Math. Ann. Bd. I gegebene Methode der typischen Darstellung.

Für $\Gamma \cdot L$ wurde p. 21 der Ausdruck gegeben[1])

$$\Gamma L = K(\Gamma_1 + 4 f\psi) - 6\Omega f N - u_x \left(2\psi \Gamma_1 + 4f\left(\psi^2 + \frac{S^*}{96}\right)\right).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Lambda = \Gamma_1 + 4f\psi$$

$$\mathsf{M} = \psi^2 - \frac{S^*}{96}$$

$$\Phi = 2\psi\Lambda - 4f\mathsf{M} = 2\psi\Gamma_1 + 4f\psi^2 + \tfrac{1}{24} f S^*,$$

dann lassen sich mit Hilfe der Math. Ann. I. p. 77 u. 78 gegebenen Formeln leicht die Ausdrücke bilden

$$\Gamma \sum \frac{\partial N}{\partial x_i} l_i = \Lambda \sum \frac{\partial N}{\partial x_i} k_i - 6\Omega f \sum \frac{\partial N}{\partial x_i} n_i - \Phi \sum \frac{\partial N}{\partial x_i} x_i$$

$$= -8\Omega f K - (2\Lambda\psi - 16 f\mathsf{M}) N + 2\Omega\Lambda u_x,$$

ebenso

$$\Gamma \sum \frac{\partial K}{\partial x_i} l_i = \Lambda \sum \frac{\partial K}{\partial x_i} k_i - 6\Omega f \sum \frac{\partial K}{\partial x_i} n_i - \Phi \sum \frac{\partial K}{\partial x_i} x_i$$

$$= -(8\psi\Lambda - 28 f\mathsf{M}) K + (\tfrac{21}{2}\Delta - 36 f\psi)\Omega N + u_x (9\Lambda\mathsf{M} - 48\Omega^2 f)$$

$$\sum \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} l_i = 12(\Gamma_1 \alpha_i \alpha_x^{\,2} - \Gamma_2 a_i a_x^{\,2}) = 3(\Gamma_1 \Gamma_{12} - \Gamma_2 \Gamma_{11}) - 12\Gamma_1\psi$$

$$= -\tfrac{1}{2} f S^* - 12\Gamma_1\psi.$$

Nun bilde ich den Ausdruck

$$4\Gamma^2 L_{y'} L_x^{\,3} L_x'^{\,4} u_l = \Gamma^2 \sum \frac{\partial L}{\partial x_i} l_i;$$

man hat zunächst

$$L \sum \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} l_i + \Gamma \sum \frac{\partial L}{\partial x_i} l_i = \Lambda \sum \frac{\partial K}{\partial x_i} l_i + K \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} l_i - 6\Omega f \sum \frac{\partial N}{\partial x_i} l_i$$

$$- 6N \sum \frac{\partial \Omega f}{\partial x_i} l_i - u_x \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} l_i - L\Phi.$$

---

1) Mit S^*, T^* usw. werden die Ausdrücke $S_{\Delta, -f}$, $T_{\Delta, -f}$ usw. bezeichnet. Die typische Darstellung eignet sich deshalb besonders zur Ausrechnung dieser verwickelten Ausdrücke mit einer Variablenreihe, weil sich zum Schluß wieder Γ oder $\bar{\Gamma}$ heraushebt, was zugleich eine Kontrolle gibt.

Setzt man die oben erhaltenen Werte ein und faßt die Glieder zusammen, so kommt

$$\Gamma^2 \sum \frac{\partial L}{\partial x_i} l_i = KA + NB + u_x C.$$

Die Ausdrücke A, B, C lassen sich dann sehr erheblich vereinfachen, wenn man die Relation benützt

$$24^2 \Omega^2 = 384 \psi^2 - 12 \psi S^* + 2 T^* \qquad \text{(C. L. p. 640 (42).);}$$

man erhält

$$\begin{aligned} A &= -\Gamma(4\Gamma_{11}\psi + \tfrac{1}{3} S_1^* f) \\ B &= \Gamma \cdot 6 \Omega \Gamma_{11} \\ C &= \Gamma(\tfrac{1}{8} S_1^* \Gamma_1 + \tfrac{1}{24} f T_1^* + \tfrac{2}{3} f \psi S_1^* + 4 \psi^2 \Gamma_{11}). \end{aligned}$$

Setzt man nun in dem Ausdruck $\sum \frac{\partial L}{\partial x_i} l_i$

$$u_i = (\widehat{lx}),$$

so kommt der Faktor mit u_x in Wegfall, und man hat

$$4\Gamma(lxl') L_{l''} L_x^{\,3} L_x'^{\,4} L_x''^{\,4} = -(lxk)(4\Gamma_{11}\psi + \tfrac{1}{3} S_1^* f) + (lxn) 6 \Omega \Gamma_{11};$$

und da

$$(lxk) = \Delta(lxl') - f(lxm) = -f(lxm) \quad \text{ist,}$$

wird obiger Ausdruck gleich (vgl. C.-L. p. 639 (35))

$$\begin{aligned} &-\tfrac{3}{2} \Omega f(4\Gamma_{11}\psi + \tfrac{1}{3} S_1^* f) + (\tfrac{1}{4}\Gamma_1 + \psi f) 6 \cdot \Omega \Gamma_{11} \\ &= \Omega \{-6\Gamma_{11} f\psi - \tfrac{1}{2} f^2 S_1^* + \tfrac{3}{2} \Gamma_1 \Gamma_{11} + 6 \Gamma_{11} f \psi\} \\ &= \frac{\Omega}{2} \{3 \Gamma_1 \Gamma_{11} - f^2 S_1^*\} = \tfrac{3}{2} \Gamma \Omega \Gamma_{111}, \end{aligned}$$

folglich hat man

$$\underline{L_{l''}(lxl') L_x^{\,3} L_x'^{\,4} L_x''^{\,4} = \tfrac{3}{8} \Omega \Gamma_{111} = \tfrac{3}{8} \Omega \Delta.} \quad \text{(C.-L. p. 637 (25).)}$$

Hiermit ist die Behauptung zugleich rechnerisch erwiesen.[1])

§ 4. Die Formen F' und F für $\varkappa L + \lambda M$ und $\varkappa \Lambda + \lambda \mathsf{M}$.

Um die Kurve F'_L, den Ort der Wendetangenten der Integralkurven des Konnexes L, zu finden, hat man folgende Operationen auszuführen; man rechne die beiden Ausdrücke

---

1) Betreffs der Absonderung des Faktors Γ vgl. C. u. G., Math. Ann. VI p. 498. Mittels der typischen Darstellung wurden die Kovarianten 2. Grades von L und M, sowie die simultanen von N und L und N und M von mir ausgerechnet; bemerkenswert sind die beiden Relationen

$$N_l L_n N_x^{\,3} L_x^{\,3} \equiv 0$$

und

$$N_m M_n N_x^{\,3} M_x^{\,3} \equiv 0.$$

$$\bar{J} = (LL'u)^4 u_i u_{i'}$$

$$\bar{\mathfrak{I}} = (LL'u)^2 (L'L''u)^2 (L''Lu)^2 u_i n_{i'} u_{i''}$$

und bilde

$$F' = \bar{J}^3 - 6\bar{\mathfrak{I}}^2.$$

Die geometrischen Überlegungen ersparen uns jedoch die Anfstellung dieser komplizierten Ausdrücke. Da Φ' den Ort der Wendepunkte gibt, hat man nur zu jedem Punkte von Φ' den Koinzidenzstrahl zu suchen, um den Ort der Wendetangenten zu erhalten.

Für einen Punkt von Ω bekommt man nach früheren Überlegungen immer als Koinzidenzstrahl die durch den Punkt gehende Gerade von Ω; folglich ist in F' als Faktor Ω in Linienkoordinaten, also die Gleichung der 12 Dreieckseckpunkte enthalten[1]), und wir haben nur zu untersuchen, welche Kurve die Koinzidenzstrahlen der Punkte von Δ umhüllen.

L hat die gleiche Hauptkoincidenz wie der Konnex

$$\Theta_x{}^2 u_\vartheta \alpha_\vartheta \alpha_x{}^2 = \tfrac{1}{6} \sum \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} \frac{\partial \Theta}{\partial u_i},$$

dessen geometrische Bedeutung früher schon untersucht wurde (p. 23).

Ist x ein Punkt von Δ, so zerfällt die Polare C_2 von x in bezug auf f, der Doppelpunkt derselben liegt auf Δ; die Polare von x in bezug auf Δ ist die Tangente an Δ im Punkte x, und diese Gerade geht im allgemeinen nicht durch den Doppelpunkt. Nun ist der Pol jeder nicht durch den Doppelpunkt gehenden Geraden der Ebene in bezug auf die zerfallende C_2 eben der Doppelpunkt; folglich ist der Koinzidenzstrahl des Punktes x die Verbindungslinie von x mit dem Doppelpunkt, also eine Tangente der Cayleyschen Kurve; diese Kurve wird dann zweimal erzeugt, weil der Punkt x und der Doppelpunkt der C_2 vollständig vertauschbar sind, und es ergibt sich

$$F' = \bar{\Gamma} \Sigma^2,$$

wenn $\bar{\Gamma} = 0$ wieder die Gleichung der 12 Dreieckseckpunkte bedeutet.

$\bar{\Gamma}$ ist vom 24. Grad in Symbolen f, also F' vom 30. Grad, wie es auch sein muß.

Da sich nun vermöge der bekannten Übertragungsformeln diese Resultate leicht auf M, Λ und Μ übertragen lassen, so kommt man zu folgendem Resultat:

Den Ort der Wendetangenten der Integralkurven der Schar $\varkappa L + \lambda M$ bilden die Kurven $\bar{\Gamma} \Sigma_{\varkappa\lambda}{}^2$.

---

1) Es wird in Linienkoordinaten:

Ω vom Grade 72, mithin I'^6, da jeder Dreieckspunkt als $\binom{3}{2}$ Doppelpunkt zählt;

Γ „ „ 132, „ $I'^2 \Psi^{12}$;

$\Omega \cdot \Gamma$ „ „ 420, „ $\Gamma^{20} \Psi^{12} X^2$, wo X die Gleichung der 36 einfachen Schnittpunkte von Ω und Γ ist.

Den Ort der Rückkehrpunkte der Integralkurven der Konnexschar $\varkappa\Lambda + \lambda M$ *bilden die Kurven* $\Gamma\Delta^2_{\varkappa\lambda}$.[1])

Ω ist singuläres Integral der Differentialgleichungen der Konnexe L, M, K, wie von vornherein einzusehen war, da ja Ω die Gleichung der 12 Dreieckseckpunkte in Punktkoordinaten gibt und diese Punkte sich unter den Grundpunkten der Konnexe befinden.

§ 5. Die Koinzidenzpunkte von $\varkappa L + \lambda M$ auf u.

Die 4 Koinzidenzpunkte von L auf u sind gemeinschaftliche Punkte des Büschels

$$(lxy) = 0; \quad u_y = 0.$$

1) Die Hauptkoinzidenz der Konnexschar $\varkappa Q^2 + \lambda\Theta^3$ wurde behandelt von Herrn Harnack, Math. Ann. IX; in diesem Falle läßt sich die Differentialgleichung der Hauptkoinzidenz mittels elliptischer Funktionen integrieren, da diese Konnexe direkt durch Übertragung aus dem binären kubischen Formensystem *einer* Form entstehen; auch die Integralkurven dieser Konnexschar haben ihre Wendepunkte auf Δ, während ihre Wendetangenten Σ umhüllen.

Da man F' kennt, kann man, wenn man $\bar{J}$ direkt aufstellt, auch $\bar{\mathfrak{J}}$ leicht finden durch die Gleichung

$$C\bar{\Gamma}\Sigma^2 = \bar{J}^3 - 6\bar{\mathfrak{J}}^2.$$

Die Form $\bar{J} = (LL'u)^4 u_l u_{l'}$ rechnet man zweckmäßig von dem Konnex $a_s b_s u_s a_x^2 b_x^2$ ausgehend, der ja die gleiche Hauptkoinzidenz hat wie L; hier soll bloß das Resultat dieser Rechnung angeführt werden; man erhält bis auf eine Konstante

$$(LL'u)^4 u_l u_{l'} = \mathsf{T}^2 - \frac{S}{6}\Sigma^2.$$

Also haben die Tangenten der beiden K_3: $\mathsf{T} \pm \sqrt{\frac{S}{6}}\,\Sigma$ der Schar $\varkappa\Sigma + \lambda\mathsf{T}$ die Eigenschaft, daß auf ihnen die Koinzidenzpunkte von L ein äquianharmonisches Punktquadrupel bilden.

Schreibt man nun

$$\bar{\mathfrak{J}}^2 = C\bar{\Gamma}\Sigma^2 + C'(\mathsf{T}^2 - \frac{S}{6}\Sigma^2)^3,$$

so müssen C und C' sich so bestimmen lassen, daß rechts ein vollständiges Quadrat steht, was zugleich eine Kontrolle gibt. In der Tat erhält man auf diese Weise

$$(LL'u)^2 (L'L''u)^2 (L''Lu)^2 u_l u_{l'} u_{l''} = 2\,T\Sigma^3 - 3\,S\Sigma^2\mathsf{T} + 6\,\mathsf{T}^3.$$

Auf den Tangenten dieser K_9 liegen also die Koinzidenzpunkte harmonisch.

Um die gleichen Bildungen für M zu erhalten, hat man nur die Symbole von f durch solche von Δ zu ersetzen.

Nun ist aber

$$-2\,\mathcal{I}\lambda^3 - 3S\varkappa\lambda^2 + 6\varkappa^3 = 6G_1,$$

also

$$(LL'u)^2 (L'L''u)^2 (L''Lu)^2 u_l u_{l'} u_{l''} = 6\,G_{1\,\mathsf{T}_1 - \Sigma}.$$

Da nun $R\Sigma_{\varkappa\lambda} = PS_1 - \Pi S_2$ (Math. Ann. VI 475 u. $\Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R^2}{3}\Sigma_{\varkappa\lambda}$) und S_1 die zu G_1 dualistische Form ist, so stellt die obige Gleichung diejenigen 3 Kurven des Büschels $\varkappa\Sigma + \lambda\mathsf{T}$ dar, die $\Pi^{(\Pi)}$ oder $-\frac{2}{81}S^2R^6 f$ zur Cayleyschen Kurve haben, wenn man sie als Hessesche Kurven der 3 durch $G_1 = 0$ gegebenen $\varkappa\Pi + \lambda P$ betrachtet.

Nun sind die Kurven (lxy) identisch mit den C_5

$$a_x a_n a_y = 0,$$

und diese Gleichung gibt auch die Jakobische Kurve von f, Δ und $Q_y = a_y a_x^2$, also den Ort der Punkte, deren lineare Polare in bezug auf f, Δ und Q_y sich in einem Punkte schneiden.

Wandert x auf u, so beschreiben die Schnitte der linearen Polaren in bezug auf f und Q_y sowohl, wie auf Δ und Q_y je eine C_3, ein gemeinsamer Punkt beider C_3 ist Tangentialpunkt eines Schnittpunktes von u mit $a_x a_n a_y = 0$.

Beide C_3 sind rational; denn sie entstehen durch projektive Beziehung eines Strahlbüschels erster zu einem solchen zweiter Ordnung. Da beide ihre Doppelpunkte im Basispunkt des linearen Büschels haben, bleiben nur noch 5 bewegliche Schnittpunkte.

Läßt man nun die Gerade u durch y gehen, setzt also

$$u_i = \widehat{(ys)}_i,$$

so hat man die beiden Gleichungen

$$C_3(f, Q_y) = \tfrac{1}{2} a_y^2 a_z \quad \Theta_z^2 (\vartheta sy)^3$$
$$C_3(\Delta, Q_y) = \alpha_y^2 \alpha_z (a_s a_y a_z)^2 - 2\,\alpha_y \alpha_s \alpha_z a_s a_y a_z b_y^2 b_z + \alpha_s^2 \alpha_z (a_y^2 a_s)^2,$$

wenn z_i die laufenden Koordinaten sind.

Die $C_3(f, Q_y)$ zerfällt also in die Polokonik von $\widehat{(s,y)}$ und die lineare Polare von y, wobei zu bemerken ist, daß diese die linearen Polare berührt; denn die Polokonik von u ist die Enveloppe der linearen Polaren der Punkte von u in bezug auf f.[1])

Dem einen Schnittpunkt, den $a_y^2 a_z$ noch mit der $C_3(\Delta, Q_y)$ hat, entspricht auf $\widehat{sy}$ offenbar y.

Die $C_2\, \Theta_z^2 (\vartheta sy)^2$ schneidet die $C_3(\Delta, Q_y)$ außer in dem Doppelpunkt noch in 4 Punkten, denen dann die Koinzidenzpunkte von L auf u entsprechen; nun folgt aus dem Bestehen der beiden Gleichungen

$$(a_s a_y a_z)^2 - a_y^2 a_z \cdot a_s^2 a_z = 0$$
$$\alpha_y^2 \alpha_z (a_s a_y a_z)^2 - a_y^2 a_z \cdot (2\,\alpha_y \alpha_s \alpha_z a_y a_s a_z - \alpha_s^2 \alpha_z \cdot a_z^2 a_z) = 0$$

offenbar die dritte

$$\alpha_y^2 \alpha_z a_s^2 a_z - 2\,\alpha_y \alpha_s \alpha_z a_y a_s a_z + \alpha_s^2 \alpha_z a_y^2 a_z = \mathsf{H}_z^2 (yzy)^2 = 0.$$

Die $C_3(\Delta, Q_y)$ schneidet also auf Θ_z^2 und H_z 4 Punkte aus, welche zugleich die Schnittpunkte von Θ_z^2 und H_z^2 sind, so daß man hat:

Die Koinzidenzpunkte von L auf u sind die Berührpunkte der 4 Polarkegelschnitte der 4 Schnittpunkte von $\Theta_x^2 u\vartheta$ und $\mathsf{H}_x^2 u\eta^2$.

Es lassen sich also die Eigenschaften der Hauptkoinzidenz auch aus den Lagenbeziehungen der beiden C_3: Θ_x^2 und H_x^2 diskutieren, so muß

1) Cremona, Ebene Kurven art. 136.

die Berührungsbedingung von Θ_x^2 und H_x^2 auf Geraden u führen, für die 2 Koinzidenzpunkte von L zusammenfallen usw.

H_x^2 gibt bekanntlich eine C_2 von Punkten derart, daß u die Polar-C_2 dieser Punkte in bezug auf f und Δ in 4 harmonischen Punkten schneidet; da nun aber für die 4 Schnittpunkte mit Θ_x^2 die Polar-C_2 in bezug auf f u berührt, so muß der Polar-C_2 dieser Punkte in bezug auf Δ durch den Berührungspunkt gehen; mithin hat man:

Die Koinzidenzpunkte von $\varkappa L + \lambda M$ auf u sind diejenigen Punkte, in denen u von der Polar-C_2 eines Punktes y in bezug auf $f_{\varkappa\lambda}$ berührt und zugleich von der Polar-C_2 desselben Punktes y in bezug auf $\Delta_{\lambda\varkappa}$ geschnitten wird.[1])

Nun können wir auch leicht die Lage der Koinzidenzpunkte auf den Tangenten von

$$F' = \bar{\Gamma}\Sigma^2$$

diskutieren. Die Tangenten von Σ sind nämlich diejenigen Geraden, deren Polokonik zerfällt (Durège, Kurven dritter Ordn. p. 276).

Jeder der 2 Geraden entspricht ein Polar-C_2-Büschel in bezug auf f, dessen sämtliche Kegelschnitte u berühren müssen, folglich fallen 2 Basispunkte eines solchen Büschels in einen Punkt von u zusammen; dem Doppelpunkt der Polokonik entspricht eine Polar-C_2, die beiden Büscheln gemeinschaftlich ist, da diese mit u vier Schnittpunkte hat, muß sie zerfallen; der Doppelpunkt der Polokonik also ein Punkt von Δ sein; u ist eine Gerade dieses Polarkegelschnittes, die zweite geht durch die übrigen 2 Basispunkte jedes der beiden Büschel hindurch; der Doppelpunkt von Θ_x^2 wird also gefunden, indem man in den 2 konjugierten Punkten, in denen u Δ schneidet, die Tangenten an Δ zieht, diese schneiden sich in einem Punkte von Δ. Da nun die linearen Polaren aller Punkte von u die Polokonik berühren, also durch den Doppelpunkt gehen, die linearen Polaren der Punkte von Δ in bezug auf f aber die Tangenten von Δ in den konjugierten Punkten sind (C.-L. p. 501), so sind die beiden Geraden der Polokonik die Tangenten von Δ in den konjugierten Schnittpunkten von u.

Nun sind die Koinzidenzpunkte von L auf u die Basispunkte der beiden Polar-C_2-Büschel, diesen entsprechen aber als lineare Polaren die beiden Geraden der Polokonik; folglich ergibt sich:

Die Koinzidenzpunkte von L auf Σ bilden ein vollständiges Quadrat, und zwar sind es die beiden konjugierten Schnittpunkte einer Tangente mit Δ.

---

1) Die Kurve, die von den 4 Schnittpunkten von Θ_x^2 und H_x^2 beschrieben wird, wenn u sich um einen Punkt y dreht, entsteht durch Elimination von u aus den 3 Gleichungen

$$\Theta_x^2 u_\vartheta^2 = 0, \quad H_x^2 u_\eta^2 = 0, \quad u_\eta = 0$$

gibt also für festes x die Gleichung der 4 gemeinsamen Tangenten von u_ϑ^2 und u_η^2; folglich heißt sie

$$\Theta_x^2\, \Theta_x'^2\, (\vartheta\vartheta' y)^2 \cdot H_x^2\, H_x'^2\, (\eta\eta' y)^2 - (\Theta_x^2\, H_x^2\, (\vartheta\eta y)^2)^2 = 0.$$

Ist u eine der 9 Wendetangenten von f, so ist der Doppelpunkt der Polokonik der entsprechende Wendepunkt, und eine Gerade der Polokonik fällt selbst in u; in diesem Fall sind die beiden Koinzidenzpunkte auf u der Wendepunkt und der entsprechende Berührpunkt von Δ und Σ.

Während für die Tangenten von Σ die Hauptkoincidenz durch ein vollständiges Quadrat gegeben war, ist dies für die Geraden durch die 12 Dreiecksecken im allgemeinen nicht der Fall.

Dort waren nämlich die 2 Geraden Θ_x^2 Tangenten an H_x^2, so daß eine zweipunktige Berührung der C_2 Θ_x^2 und H_x^2 stattfand; im letzteren Falle hat man bloß eine einpunktige Berührung und Schnitt in 2 getrennten Punkten, die nur für eine endliche Zahl von Geraden zusammenfallen.

Am besten lassen sich diese Verhältnisse übersehen in der von Cayley gegebenen kanonischen Form[1])

$$L = a(a^3 + 8b^3)\{u_1(b_x x_1^4 - 2bx_1x_2^3 - 2bx_1x_3^3 + 3a\,x_2^2x_3^2) + \cdots\}$$
$$\Theta = 2\{x_1^2(-b^2u_1^2 - 2abu_2u_3) + \cdots + x_2x_3(a^2u_1^2 + 2b^2u_2u_3) + \cdots\}$$
$$\mathsf{H} = -2\{x_1^2(-b(a^3 + 2b^3)u_1^2 + a(a^3 + 4b^3)u_2u_2) + \cdots$$
$$+ x_2x_3(6a^2b^2u_1^2 - 2b(a^3 + 2b^3)u_2u_3 + \cdots\}$$

Für einen Dreieckseckpunkt zerfällt nach p. 25 die $C_5\,a_x a_n a_y$ in die 3 durch den Punkt gehenden harmonischen Geraden und eine C_2, die die beiden durch den Punkt gehenden Dreiecksgeraden in ihrem Schnitt mit der 3. Geraden des entsprechenden Dreiecks berührt und außerdem noch durch 6 Berührpunkte von Δ und Σ geht; man hat $f \cdot y_1 = 0 \quad y_2 = 0$

$$(lxy) = 3(x_1^3 - x_2^3)(bx_1x_2 - ax_3^2),$$

woraus man schließt:

Für eine durch einen Dreieckseckpunkt gehende Gerade fallen im allgemeinen 2 Koinzidenzpunkte in den Dreieckseckpunkt, und 2 außerhalb, ohne zusammenzufallen.

Ist die Gerade eine Dreiecksgerade selbst, so fallen auch die 2 weiteren Koinzidenzpunkte in den anderen Dreieckseckpunkt auf der Geraden zusammen; für eine Dreiecksgerade berühren sich also die C_2 Θ_x^2 und H_x^2 doppelt; die Berührungspunkte sind die 2 Dreieckseckpunkte auf der Geraden, die gemeinschaftlichen Tangenten die 2 übrigen Dreiecksseiten.

Für eine der 3 durch einen Dreieckseckpunkt gehenden harmonischen Geraden sind die Koinzidenzpunkte unbestimmt, was auch damit stimmt, daß diese Geraden als gemeinschaftliche Tangenten von Γ und Σ besonders ausgezeichnet sind.

§ 6. Der Konnex $\Delta_x u_\lambda^4$.

Bisher habe ich die Konnexe L und M von f ausgehend besprochen, und demgemäß die Resultate für Λ und M dualistisch auf die Kurve

1) On the 34 concomitants of the ternary cubic, American Journal of Math. vol. IV 1881.

$\Pi = 0$ übertragen. Es geschah dies, weil man gewöhnlich L und M durch Symbole von f definiert. Doch steht auch die Konnexschar $\varkappa\Lambda + \lambda\mathsf{M}$ in sehr enger Beziehung zur Kurve dritter Ordnung, die jetzt erörtert werden soll; für Λ und M hat man folgende Definitionen

$$\Lambda = (aNu)^3 u_n N_x \qquad \text{C. u. G. M. A. VI p. 494 (74).}$$
$$\mathsf{M} = (\alpha Nu)^3 u_n N_x.$$

Wie schon erwähnt, entstehen die Formen direkt durch Übertragung aus dem simultanen System zweier binärer kubischen Formen a_x^3 und α_x^3, für welche

$$J = (a\alpha)^3 \equiv 0.$$

In diesem simultanen System sind die Punkte p und π definiert durch die Relation

$$a_y^2 a_\pi + \alpha_y^2 \alpha_p \equiv 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Relation ist folgende, die beiden quadratischen Involutionen

$$a_y^2 a_x = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_y^2 a_z = 0$$

haben ein gemeinschaftliches Punktepaar, und dies ist die Polargruppe des Punktes π in bezug auf f, oder des Punktes p in bezug auf Δ. Das gemeinschaftliche Punktepaar der beiden Involutionen liegt zugleich harmonisch zu den Koiznidenzpunkten von Θ und K als Doppelpunkten beider Involutionen, woraus folgt: die Polarkegelschnitte eines Punktes $\varkappa\Lambda + \lambda\mathsf{M}$ auf u in bezug auf $\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f$ schneiden u in 2 festen Punkten, die zugleich zu den Koinzidenzpunkten von Θ und K harmonisch liegen.

Aus dem binären System erhält man nun auch leicht die Formeln, die von Herrn Harnack Math. Ann. IX. p. 230 für die Hauptkoinzidenzen von Λ und M aufgestellt sind; interessant ist besonders diejenige, die Λ in Beziehung zu Θ setzt (11)

$$\Theta\Lambda = \tfrac{1}{2}\Delta F - \tfrac{1}{6} f\Sigma^2 (\text{mod. } u_x).$$

Sie sagt aus: Die Hauptkoinzidenz von $\Theta\Lambda$ wird auf u ausgeschnitten durch die C_3

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0$$

wo

$$\varkappa F + \lambda\frac{\Sigma^2}{3} = 0.$$

Legt man also durch einen Koinzidenzpunkt von Θ auf u die einzige hindurchgehende C_3, so schneidet diese u in 2 weiteren Punkten, deren einer der zweite Koinzidenzpunkt von Θ ist, während der andere der Koinzidenzpunkt von Λ ist.

Umgekehrt liegen die Koinzidenzpunkte aller durch einen Punkt y gehenden Geraden in bezug auf Θ auf der C_4

$$\Theta_x^2 (\vartheta xy)^2 = 0,$$

die in y einen Doppelpunkt hat, sie schneidet die durch y gehende C_3 in 12 Punkten, von denen 2 nach y, 2 weitere in die einfachen Schnittpunkte der Doppeltangenten mit f fallen als Koinzidenzpunkte derselben in bezug auf Λ; es bleiben also noch 8 weitere Schnittpunkte, die auf 4 Geraden verteilt sind, die durch y gehen, und diese Geraden sind die Koinzidenzstrahlen von y in bezug auf Λ.

Ferner sieht man leicht, daß wenn für u

$$\Sigma^2 = 0$$

für die Koinzidenzpunkte von $\Theta\Lambda$

$$\Delta = 0$$

sein muß; und da die Koinzidenzpunkte von Θ die konjugierten Pole sind, bleibt für Λ der dritte Schnittpunkt übrig; ist dagegen

$$F = 0,$$

so hat man

$$f = 0,$$

und da für eine Tangente von f die Koinzidenzpunkte von Θ in den Berührpunkt zusammenfallen $(F = (\Theta\Theta' u)^2 u\vartheta^2 u\vartheta'^2)$, bleibt für Λ der Tangentialpunkt des Berührpunktes übrig.

Umgekehrt sind für einen Punkt von f die 4 Koinzidenzstrahlen von Λ die 4 an f gehenden Tangenten; da der Koinzidenzstrahl von Θ die Tangente in diesem Punkte wird. Für einen Punkt von Δ hat man die 6 Tangenten an Σ^2, die Koinzidenz von Θ wird durch den doppelt gezählten Verbindungsstrahl mit dem konjugierten Pol gegeben, so daß für Δ sich als Koinzidenzstrahlen die 2 übrigen Tangenten an Σ jede doppelt gezählt ergeben; damit sind die früheren Resultate in der einfachsten Weise verifiziert.

Weiterhin wurde p. 13 eine einfache Definition für die Gerade

$$\Lambda_x u_\lambda^4 = 0$$

gegeben; nämlich: *Die Gerade Λ_x ist die Verbindungsgerade der Tangentialpunkte der Schnittpunkte von u mit f.*

Diese Verbindungsgerade der Tangentialpunkte wurde schon von Cayley behandelt in seinem: Memoir of Curves of the third order, Phil. Trans. vol. 147 (Ges. Werke Bd. 2), wo er die Bezeichnungen satellite line für die Gerade Λ und satellite point für den Koinzidenzpunkt von Λ benutzt. Er beweist auch die beiden sich unmittelbar aus der Definition ergebenden Sätze, daß für eine Tangente von f die begleitende Gerade die Tangente im Tangentialpunkt wird, und daß die Hessesche Kurve der Ort der begleitenden Punkte der Tangenten der Cayleyschen Kurve ist.

Ebenso ergibt sich auch direkt, daß die Gerade Λ_x für die Wendetangenten und die Dreiecksgeraden in diese Geraden selbst hineinfällt.

Dreht sich Λ um einen Punkt x, so gehören zu jeder Lage derselben 16 Geraden u, und diese Geraden umhüllen die $K_4 \Lambda_x u_\lambda^4$.

Liegt x auf f, so zerfällt die K_4 in 4 Punkte, nämlich das dem Punkte x entsprechende Quadrupel der Berührungspunkte der von ihm an f gehenden Tangenten.

Dreht sich umgekehrt u um einen Punkt, so umhüllt Λ eine rationale K_4, die durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$\varrho u_i = \Lambda_i u_\lambda^4 \qquad i = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$u_y = 0$$

erhalten wird; dies gibt dann die Gleichung des zu Λ konjugierten Konnexes. Für gegebenes v stellt dieser Konnex 16 Geraden dar, und dies sind die schon früher p. 13 behandelten Verbindungsgeraden der Berührpunkte der 3 von den Schnittpunkten von v an die Kurve gehenden Tangentenquadrupel; denn diese Geraden sind gemeinschaftliche Tangenten des Büschels

$$\Lambda_x u_\lambda^4 = 0; \qquad v_x = 0.$$

Bevor diese Verhältnisse ausführlich besprochen werden, sollen noch die Kurvensysteme U_v und X_y kurz erörtert werden.

Die U_v

$$(\Lambda u v)\, u_\lambda^4 = 0$$

bilden ein Gewebe von K_5, die sämtlich die 12 Dreiecksgeraden und die 9 Wendetangenten berühren; von jedem Punkte von v gehen 5 Tangenten an die K_5, wovon eine in v fällt, die 4 übrigen die Koinzidenzstrahlen des Punktes sind; v wird im Koinzidenzpunkt berührt und außerdem noch in den Schnittpunkten von $\Omega \Delta^2 = 0$ geschnitten; in den Schnittpunkten von v mit Ω hat die Kurve einfache Punkte, während die 3 Schnittpunkte von v mit Δ Doppelpunkte sind; in der Tat bleiben nur noch 6 paarweise zusammenfallende Tangenten von U_v und Σ, da U_v die Wendetangenten von f berührt.

Bei C_5

$$\Lambda_x (\lambda x y)^4 = 4$$

schneiden auf jeder durch y gehenden Geraden den Koinzidenzpunkt aus, y ist 4facher Punkt der Kurven. Jede C_5 schneidet Δ in 15 Punkten; von denen immer 9 in die Wendepunkte hineinfallen, weil für die Verbindungsgerade von y mit einem Wendepunkt immer der Koinzidenzpunkt in den Wendepunkt hineinfällt. Es bleiben noch 6 Verbindungslinien von y mit den Schnittpunkten der C_5 und Δ, die zugleich Tangenten an Σ sein müssen; da nun von y bloß 3 Tangenten an Σ gehen, müssen die weiteren Schnittpunkte mit Δ paarweise zusammenfallen, Δ wird von den C_5 $\Lambda_x (\lambda x y)^4$ in 3 Punkten berührt; auf jeder Tangente durch y an Σ liegt ein Polepaar von Δ, der Berührpunkt ist der dritte Schnittpunkt.

Aus dem Restsatze ergibt sich, daß diese 3 Berührungspunkte immer ein Punkttripel der Hesseschen Kurve bilden, in dem ein Kegelschnitt die Kurve berührt. Es ist dies die Polokonik derjenigen Geraden in bezug auf f, welche die konjugierten Pole der 3 Berührpunkte verbindet.

f wird von den C_5 $\Lambda_x(lxy)^4$ in 6 beweglichen Punkten geschnitten, welches die einfachen Schnittpunkte der Tangenten von y an f mit f sind, also zugleich vom beigeordneten Kegelschnitt[1]) des Punktes y ausgeschnitten werden.

Überträgt man diesen Satz dualistisch, so hat man:

Die Kurven

$$(Luv)^4 u_l = 0$$

berühren sämtlich die 9 harmonischen Geraden und außerdem Σ in 3 Punkten; die Tangenten in diesen Punkten gehen durch die 3 Schnittpunkte von v mit Δ. Außerdem hat jede Kurve mit Π diejenigen 6 Tangenten gemein, die von den Schnittpunkten von v mit Π noch an Π gezogen werden können.

Für den konjugierten Konnex von Λ wurde bereits gefunden: Der konjugierte Konnex von Λ ist ein Konnex (16, 4) der jeder Geraden u 16 Geraden zuordnet, die in besprochenerweise die Punkte des Schnittpunktssystems von $N_x^4 u_n$ mit f verbinden.

Diese 16 Geraden entsprechen dualistisch den 16 nicht in Dreiecksecken fallenden Schnittpunkten von

$$a_x a_n a_y = 0 \quad \text{und} \quad \sum \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} y_i = 0,$$

sie sind also auch die gemeinsamen Tangenten der Kurven

$$(\Delta uv) v_\lambda^4 = 0$$

und

$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} u_i = 0,$$

wo v die laufenden Koordinaten sind.

Dabei wird

$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} u_i = 0$$

umhüllt von den Strahlenquadrupeln, die von jedem Punkt von

$$N_x^4 u_n = 0$$

als Koinzidenzstrahlen in bezug auf den Konnex N gezogen werden können.

Von den 8 Tangenten, die man von jedem Schnittpunkt von $N_x^4 u_n$ mit f an die K_8 legen kann, sind also immer 4 die Koinzidenzstrahlen dieses Schnittpunktes in bezug auf N. Ist x der gemeinschaftliche Tangentialpunkt eines der drei in den 12 Punkten enthaltenen Quadrupel, so sind die 16 Strahlen, die man, so erhält die Basistangenten der Schar

$$\varkappa \Lambda_x v_\lambda^4 + \lambda \mathsf{M}_x v_\mu^4 = 0.$$

Man hat also das Resultat: Man erhält die 16 Geraden des zu Λ kon-

1) Cremona, Ebene Kurven, art. 138.

jugierten Konnexes, wenn man von den Punkten eines Punktquadrupels immer diejenigen 4 Tangenten an die K_8

$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} u_i = 0$$

legt, die nicht Koinzidenzstrahlen dieser Punkte in bezug auf N sind; jede solche Gerade schneidet $N_x^4 u_n$ in 3 Punkten von f, der vierte Punkt ist der Berührpunkt der zur Geraden gehörigen $\Sigma_{\varkappa\lambda}$.

Die K_8

$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} u_i = 0$$

ist die Enveloppe aller dieser Geradengruppen, genommen für die Konnexschar

$$\varkappa \Lambda + \lambda \mathsf{M} = 0.$$

Umgekehrt wird jedem Punkt durch den zu Λ konjugierten Konnex eine rationale K_4 zugeordnet; für einen Punkt von f liefert sie den Tangentialpunkt 4fach gezählt; denn dreht sich u um einen Punkt von f, so muß die begleitende Gerade immer durch den Tangentialpunkt gehen, und zwar entspricht den 4 Geraden u nach den Berührpunkten eines Tangentenquadrupels immer die gleiche Gerade v nach dem gemeinschaftlichen Tangentialpunkt.

Dualistisch übertragen liefert diese Betrachtung die Sätze:

Zieht man von einem Punkte x der Ebene an eine Kurve $\Pi_{\varkappa\lambda}$ die drei Tangenten, so schneidet jede derselben noch in 4 Punkten; die 12 Tangenten in diesen Punkten an $\Pi_{\varkappa\lambda}$ lassen sich nun so anordnen, daß immer drei verschiedenen Quadrupeln angehörige durch einen Punkt gehen, man erhält so nur 16 Punkte, die sich auf 8 verschiedene Weisen zu 4 so gruppieren lassen, daß die von ihnen an $\Pi_{\varkappa\lambda}$ gehenden 12 Tangenten alle obigen 12 enthalten. Die so erhaltenen 16 Punkte stellen die zum Punkte x gehörige Klassenkurve des zu $\varkappa\Lambda + \lambda\mathsf{M}$ konjugierten Konnexes dar.

Die zu einer Geraden u gehörige Punktkurve dieses Konnexes findet man, wenn man von jedem Punkt von u die Tangenten an $\Pi_{\varkappa\lambda}$ zieht, und die von den Berührungspunkten derselben noch ausgehenden Tangenten, ihre Tangentialgeraden, zum Schnitt bringt.

Die zum Schnittpunktssystem von $N_x^4 u_n$ mit f gehörigen 16 Geraden haben noch weitere 48 Schnittpunkte, welche zu den Schnittpunkten der Tangentenquadrupel in enger Beziehung stehen.

Es schneide die Gerade F in den Punkten α, β, γ die C_3 f. Zu diesen gehören die folgendermaßen bezeichneten Tangentenquadrupel:

zu α: $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$

zu β: $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$

zu γ: $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$

mit den Berührpunkten

$$a_1\ a_2\ a_2\ a_4$$
$$b_1\ b_2\ b_3\ b_4$$
$$c_1\ c_2\ c_3\ c_4.$$

Dabei kann man sich die Werte a_i, b_k, c_h gleich den Werten eines Parameters in den betreffenden Kurvenpunkten gesetzt denken, der der Einfachheit halber in einem Wendepunkt 0 sein soll (mod ω, ω').

Bezeichnet man die Verbindungslinie der Punkte a_i, b_k, c_h, mit $Da_ib_kc_h$, wo

$$a_i + b_k + c_h = 0 \text{ (mod } \omega, \omega'),$$

so läßt sich die Kurve immer darstellen[1]) in der Form

$$\varrho f = A_iB_kC_h - D^2a_ib_kc_hF.$$

Ist nun $Da_{i_1}b_{k_2}c_{h_2}$ eine andere Gerade, wo

$$a_{i_1} + b_{k_1} + c_{h_1} \equiv 0 \text{ (mod } \omega, \omega'),$$

so hat man ebenso

$$\varrho_1 f = A_{i_1}B_{k_1}C_{h_1} - D^2a_{i_1}b_{k_1}c_{h_1}F,$$

woraus folgt

$$A_iB_kC_h - D^2a_ib_kc_hF = \lambda^2(A_{i_1}B_{k_1}C_{h_1} - D^2a_{i_1}b_{k_1}c_{h_1}F)$$

oder

$$A_iB_kC_h - \lambda^2A_{i_1}B_{k_1}C_{h_1} = F\{Da_ib_kc_h + \lambda Da_{i_1}b_{k_1}c_{h_2}\}\ \{Da_ib_kc_h - \lambda Da_{i_1}b_{k_1}c_{h_1}\}.$$

Da die rechte Seite in 3 lineare Faktoren zerfällt, muß es auch die linke tun; es müssen nun 2 verschiedene Fälle eintreten; der erste ist schon behandelt von Salmon p. 135, Durège p. 391.

I. Es sei einer der Indices i_1, k_1, h_1 gleich dem entsprechenden der Indices i, h, k, etwa

$$i_1 = i \qquad a_{i_1} = a_i,$$

dann sind k_1 und k, h_1 und h verschieden, wenn nicht beide Geraden ganz zusammenfallen sollen.

Die Geraden $Da_ib_kc_h$ und $Da_ib_{k_1}c_h$ schneiden sich dann in einem der 12 Punkte auf f, nämlich a_i, und man hat

$$A_i(B_kC_{h_1} - B_{k_1}C_h) = F\{Da_ib_kc_h + \lambda Da_{i_1}b_{k_1}c_{h_1}\}\ \{Da_ib_kc_h - \lambda Da_ib_{k_1}c_{h_1}\}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, da F im allgemeinen nicht mit A_i zusammenfällt, daß die Gerade

$$(\widehat{B_{k_1}C_h}\,\widehat{B_kC_{h_1}}\,x) = 0$$

durch a_i geht, und zu den Geraden $Da_ib_kc_h$ und $Da_{i_1}b_{k_1}c_{h_1}$ harmonisch

1) Die Gleichung der 3 Tangenten in den Schnittpunkten einer Geraden u heißt

$$Ff + 2\Lambda_x u_x{}^4 u_x{}^2 = 0,$$

wenn F die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten darstellt; für festes x gibt die Gleichung die 6 Berührpunkte der von x an die Kurve gehenden Tangenten.

liegt in bezug auf A_i; ist umgekehrt ein Indexpaar k_1, h gegeben, so lassen sich 3 zugehörige Paare k, h_1 und zu jedem ein Index i bestimmen, so daß also durch einen Schnittpunkt (BC) noch 3 Geraden gehen, welche (BC) mit einem andern Schnittpunkt zweier Tangenten B und C verbinden und durch einen Punkt a_i gehen; denn man hat die 2 Gleichungen

$$a_i + b_k + c_h \equiv 0, \quad \text{wo} \quad k \neq k_1; \quad h \neq h_1$$
$$a_i + b_{k_1} + c_{h_1} \equiv 0$$

ist nun k_1 und h gegeben, so kann man zu k_1 3 Werte k bestimmen, nämlich

$$k_1 + 1, \quad k_1 + 2, \quad k_1 + 3 \pmod 4;$$

ist so k gefunden, so bestimmt sich i durch die Gleichung

$$a_i + b_k + c_h \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$$

und schließlich h_1 durch

$$a_i + b_{k_1} + c_{h_1} \equiv 0.$$

Durch einen Punkt a_i laufen 6 solcher Verbindungsgeraden, da die durch den Punkt a_i gehenden Geraden

$$a_i b_k c_l, \quad \text{wo} \quad a_i + b_k + c_l \equiv 0$$

auf 6 Arten zu 2 kombiniert werden können, und im ganzen gehen also durch die Punkte a_i 24 Geraden, deren jede 2 Schnittpunkte beider Tangentenquadrupel (B) und (C) verbindet; dabei kommen nur solche Indicespaare in Betracht, für welche

$$b_k + c_h \equiv b_{k_1} + c_{h_1} \quad \text{und} \quad k \neq k_1; \quad h \neq h_1 \quad \text{ist.}$$

II. Ist keiner der Indices i_1, k_1, h_1 gleich dem entsprechenden der Indices i, k, h, so gilt die Gleichung

$$A_i B_k C_h - \lambda^2 A_{i_1} B_{k_1} C_{h_1} = F\{Da_i b_k c_h + \lambda Da_{i_1} b_{k_1} c_{h_1}\}\{Da_i b_k c_h - \lambda Da_{i_1} b_{k_1} c_{h_1}\}$$
$$i \neq i_1; \quad k \neq k_1; \quad h \neq h_1.$$

Dann schneiden sich die Geraden $Da_i b_k c_h$ und $Da_{i_1} b_{k_1} c_{h_1}$ nicht in einem der 12 Punkte auf f; auf der linken Seite muß sich F absondern; in der Tat liegen auf F die 3 Punkte

$$A_i = 0 \quad A_{i_1} = 0;$$
$$B_k = 0 \quad B_{k_1} = 0;$$
$$C_h = 0 \quad C_{h_1} = 0;$$

welche gewonnen werden, wenn man in dem Schema

$$A_i \; B_k \; C_h$$
$$A_{i_1} \; B_{k_1} \; C_{h_1}$$

je 2 übereinanderstehende Elemente verbindet; verbindet man jedoch übereinanderstehende Elemente, nachdem man die untere Reihe zyklisch vertauscht hat, so bekommt man die beiden Punkttripel

$$(A_i B_{k_1}),\quad (B_k C_{h_1}),\quad (C_h A_{i_1})$$

und

$$(A_i C_{h_1}),\quad (B_k A_{i_1}),\quad (C_h B_{k_1})$$

jedes solche Tripel liegt dann auf einer Geraden.

Denn würde man ein anderes Tripel, etwa

$$(A_i B_{k_1})\ (B_k A_{i_1})\ (C_h A_{i_1})$$

nehmen, so würden immer 2 Punkte desselben auf einer Tangente (hier A_{i_1}) liegen, und sollten die drei Punkte in einer Geraden liegen, so müßten diese 2 Punkte zusammenfallen, weil A_{i_1} A_i nur in einem Punkte auf F schneidet und F im allgemeinen nicht Tangente ist; dann gingen aber von diesem gemeinsamen Punkt 3 Tangenten an f, deren Berührungspunkte in einer Geraden lägen, F wäre also Tangente an Σ, was im allgemeinen nicht der Fall ist.[1])

In diesem zweiten Fall hat man also: Man kann die Tangentenquadrupel aus 3 in einer Geraden liegenden Punkten der Kurve auf 3 Arten zu 2 kombinieren; je 2 haben dann 16 Schnittpunkte von der Art

$$(AB)\ (BC)\ (CA).$$

Sind dann $Da_i b_k c_h$ und $Da_i b_k c_{h_1}$ 2 der besprochenen 16 Geraden, die sich nicht in einem der 12 Punkte auf f schneiden, so gibt es durch ihren Schnittpunkt 2 zu ihnen harmonisch liegende Geraden, deren jede 3 Tangentenschnittpunkte verschiedener Kombinationen verbindet, nämlich die erste die Punkte

$$(A_i B_{k_1}),\quad (B_k C_{h_1}),\quad (C_h A_{i_1}),$$

die zweite

$$(A_i C_{h_1}),\quad (B_k A_{i_1}),\quad (C_h B_{k_1}),$$

Im ganzen gibt es 48 nicht auf f fallende Schnittpunkte der 16 Geraden, und durch jeden gehen 2 solcher Verbindungsgeraden, deren jede 3 Tangentenschnittpunkte verbindet; also gibt es im ganzen 96 solcher Verbindungsgeraden, und da es 48 Tangentenschnittpunkte gibt, gehen durch einen solchen $\frac{3 \cdot 96}{48} = 6$ Verbindungsgeraden mit Schnittpunkten anderer Kombinationen von Quadrupeln, deren jede noch einen 3. Schnittpunkt enthält.

Um festzulegen, mit welchem Tangentenschnittpunkt ein solcher immer auf diese Weise verbunden wird, nehmen wir an, es seien 2 Tangentenschnittpunkte

$$(A_m B_n),\quad (B_s C_t)$$

gegeben und fragen, wie sie liegen müssen, damit ihre Verbindungs-

1) Liegen die Berührpunkte in einer Geraden, so liegen auch die Tangentialpunkte derselben in einer Geraden; es zerfällt also der beigeordnete Kegelschnitt, also ist der Punkt ein Punkt von Δ (Cremona 138 a), woraus die Behauptung folgt.

gerade immer durch einen dritten Tangentenschnittpunkt von der Form (AC) geht.

Ist zunächst $n = s$, so liegen beide Schnittpunkte auf der Tangente B_n, auf der im allgemeinen kein Punkt (AC) liegt. Ist dies jedoch nicht der Fall, so bestimmen wir 2 Punkte c_h und a_{i_1} durch die Gleichungen

$$a_m + b_s + c_h \equiv 0$$
$$a_{i_1} + b_n + c_t \equiv 0;$$

ist dann weder

$$i_1 = m$$

noch

$$h = t,$$

so ist der Punkt $(C_h A_{i_1})$ ein Punkt der verlangten Eigenschaft. Hat man aber etwa

$$h = t,$$

so muß m von i_1 verschieden sein, wenn nicht auch $n = s$ sein soll; dann hat man also für die 2 Punkte

$$(A_m B_n), \quad (B_s C_t)$$

die Gleichung

$$\underline{a_m + b_s + c_t \equiv 0}$$

und unser Kriterium versagt; ebenso für den Fall

$$\underline{a_m + b_n + c_t \equiv 0},$$

Zählen wir nun die Fälle ab, die durch diese Gleichungen ausgeschlossen sind, so kommen wir gerade auf die oben als möglich erkannten 6 Verbindungsgeraden, womit gezeigt ist, daß damit alle Möglichkeiten erschöpft sind.

Gegeben sei der Punkt $(A_m B_n)$, wir suchen diejenigen $(B_s C_t)$, deren Verbindungsgerade mit $(A_m B_n)$ durch einen Punkt (AC) geht.

Wir bestimmen zunächst einen Index r durch die Gleichung

$$a_m + b_n + c_r \equiv 0,$$

dann hat man für t 3 Indices

$$r + 1, \quad r + 2, \quad r + 3 \pmod 4$$

oder die 3 Werte

$$c_t = c_r + \frac{\omega}{2}, \quad c_t = c_r + \frac{\omega'}{2}, \quad c_t = c_r + \frac{\omega + \omega'}{2};$$

für jeden Index hat man dann noch 2 Werte s, derart, daß b_s weder nach b_n noch in die Verbindungslinie $a_m c_t$ fällt.

Dann geht die Verbindungsgerade

$$(A_m B_n) - (B_s C_t)$$

noch durch den Tangentenschnittpunkt $(C_h A_{i_1})$; wir schreiben die 6 möglichen Fälle an:

$$c_t = c_r + \frac{\omega}{2}, \quad b_s = b_n + \frac{\omega'}{2}, \quad c_h = c_r + \frac{\omega'}{2}, \quad a_{i1} = a_m + \frac{\omega}{2},$$

$$c_t = c_r + \frac{\omega}{2}, \quad b_s = b_n + \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad c_h = c_r + \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad a_{i1} = a_m + \frac{\omega}{2},$$

$$c_t = c_r + \frac{\omega'}{2}, \quad b_s = b_n + \frac{\omega}{2}, \quad c_h = c_r + \frac{\omega}{2}, \quad a_{i1} = a_m + \frac{\omega'}{2},$$

$$c_t = c_r + \frac{\omega'}{2}, \quad b_s = b_n + \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad c_h = c_r + \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad a_{i1} = a_m + \frac{\omega'}{2},$$

$$c_t = c_r + \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad b_s = b_n + \frac{\omega}{2}, \quad c_h = c_r + \frac{\omega}{2}, \quad a_{i1} = a_m + \frac{\omega + \omega'}{2},$$

$$c_t = c_r + \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad b_s = b_n + \frac{\omega'}{2}, \quad c_h = c_r + \frac{\omega'}{2}, \quad a_{i1} = a_m + \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Fassen wir das Resultat der letzten Seiten noch einmal zusammen, so haben wir:

Die $C_4\ N_x^4 u_n$ schneidet f in 12 Punkten; dies sind die 3 Quadrupel der Berührungspunkte der von den Schnittpunkten von u an f gehenden Tangenten; verbindet man einen Punkt des ersten mit irgend einem des zweiten Quadrupels, so geht die Verbindungslinie durch einen Punkt des dritten. In dieser Weise erhält man 16 Gerade, die in 8 Gruppen von je 4 geteilt werden können, so daß solche 4 alle 12 Punkte enthalten. Die 3 Tangentenquadrupel lassen sich dreimal zu zwei kombinieren; die Tangentenschnittpunkte einer Kombination liefern verbunden mit den Berührpunkten des noch übrigen Quadrupels Gerade, welche noch einen Tangentenschnittpunkt der gleichen Kombination enthalten; diese Geraden liegen dann harmonisch in bezug auf 2 durch den Berührpunkt gehende der 16 Geraden zur Tangente im Berührpunkt. Durch jeden Tangentenschnittpunkt einer Kombination lassen sich 6 Gerade ziehen, die noch von je einer andern Kombination einen Tangentenschnittpunkt enthalten; man erhält so 96 Gerade, welche sich paarweise in je einem der 48 nicht auf f liegenden Schnittpunkte der 16 Geraden schneiden und harmonisch liegen zu den durch diesen Punkt gehenden der 16 Geraden.

Gleiches gilt naturgemäß für das Schnittpunktsystem von $N_x^4 u_n$ mit jeder Kurve des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta$.

Vita.

Geboren am 13. September 1881 als Sohn des kgl. Pfarrers Jakob Petri in Altleiningen (Pfalz), bezog ich nach Ablegung des Gymnasialabsolutoriums in Landau im Herbst 1899 die kgl. Ludwig-Maximilians-Universität München, wo ich mich dem Studium der Mathematik und Physik widmete. Zugleich war ich längere Zeit Hospitant an der kgl. Technischen Hochschule. Während meiner Studienzeit besuchte ich die Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten Bauer, v. Braunmühl, Doehlemann, v. Dyck, Ebert, Emden, Finsterwalder, Göttler, Lindemann, Lipps, Muthmann, Pringsheim, Ranke, Riehl, v. Seeliger, Schnitzer, Schwarzschild, Voss, v. Weber.